Лекции по анализу. Семестр 2. Дифференциальное и интегральное исчисление.

Е. В. Щепин

2009

Оглавление

1 Бесконечно-малые

Исчисление бесконечно-малых — так назывался математический анализ пару столетий после своего изобретения. Лейбниц, Ньютон и Эйлер считали, что существуют числа, которые они называли "бесконечно-малыми". А кривые, например, окружность, представляли как ломаные с бесконечно малыми звеньями.

Общепризнанно, что открытие исчисления бесконечно малых является самым важным, из всех математических открытий, совершенных человечеством. С анализом бесконечно малых физика получила математический аппарат для описания движения. Мгновенные изменения наблюдаемых величин выражаются бесконечно малыми величинами, называемыми их дифференциалами. "Природа говорит языком дифференциальных уравнений— писал Ньютон. А дифференциальные уравнения — это уравнения, связывающие между собой дифференциалы различных физических величин.

Парадокс движения Математика греков не знала движения. Знаменитая апория Зенона "летящая стрела"вообще утверждает невозможность движения. А именно, если предположить, что время состоит из неделимых "мгновений", то перемещение стрелы за данный промежуток времени складывается из ее мгновенных (то есть происходящих в течение одного мгновения) перемещений. Но в течении неделимого мгновения движение невозможно по определению, поэтому мгновенное перемещение движущейся стрелы равно мгновенному перемещению неподвижной. Для неподвижной стрелы сумма ее перемещений нулевая, значит и для движущейся стрелы она должна быть нулевой.

Если же принять картину мира, состоящего, подобно кинофильму из совокупности кадров-мгновений, в каждом из которых движение отсутствует, а иллюзия движения возникает в результате смены кадров, то мы придем к миру, в котором, есть лишь иллюзия движения, а "настоящего"движения нет.

Указанная проблема существует как в случае дискретного (с конечным числом мгновений), так и в случае непрерывного времени. В последнем случае неделимые мгновения (моменты времени) имеют нулевую продолжительность и мгновенные смещения движущейся и неподвижной стрелы совпадают, а потому должны совпадать и их суммы, дающие смещения за ненулевой промежуток времени. Таким образом парадокс движения ставит под удар естественное предположение, которое мы будем называть *принципом интегрируемости движения*: смещение движущегося объекта складывается из его мгновенных смещений.

Жертвуя идеей неделимого мгновения, можно сохранить принцип интегрируемости движения, являющийся основой вычислений в анализе бесконечно малых.

Парадокс движения не возникает, если предположить отсутствие неделимых мгновений. И это предположение немедленно ведет к существованию бесконечно малых величин. Действительно, предположим, что неделимых мгновений нет. Мы можем делить любой промежуток времени сколько угодно (в том числе и бесконечно много) раз, но никогда не получим точки. То что получится, все равно будет промежутком, имеющим ненулевую (возможно бесконечно малую), длительность. Например, если мы делим единичный отрезок пополам, потом делим пополам каждую половину, потом — каждый получившийся отрезок и так далее, до бесконечности, то пересечение каждой бесконечной вложенной последовательности отрезков деления дает не точку, как это принято считать в современной математике, а бесконечно малый отрезок, длина которого может быть выражена бесконечным произведением

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\ldots$$

Тогда как количество полученных бесконечно малых отрезков представляется бесконечно большим числом

$$2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot\ldots.$$

Теперь суммарная длина получившихся отрезков вычисляется как произведение их количества на длину одного отрезка, которое формально оказывается равным единице, как и следовало ожидать.

Бесконечная дистрибутивность Арифметической формой принципа интегрируемости является закон дистрибутивности умножения для бесконечных произведений. Рассмотрим бесконечное произведение

$$\prod_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) \tag{1.1}$$

Так как все скобки в этом произведении представляют разложения единицы в виде суммы пар слагаемых, то все произведение, очевидно, равно единице. С другой стороны, если перемножить эти скобки, пользуясь дистрибутивностью умножения, то мы получим сумму всевозможных бесконечных произведений вида

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\ldots$$

Все эти произведения представляют собой бесконечно малые величины, сумма которых дает единицу, если считать справедливым закон дистрибутивности для бесконечного числа сомножителей. Если же не признавать существование бесконечно малых величин, то величину всех этих слагаемых придется считать равной нулю и мы получим, что и сумма всех произведений равна нулю, вопреки закону дистрибутивности. Идея бесконечно-малых позволяет спасти этот закон, который можно рассматривать как арифметическую форму принципа интегрируемости.

Основной постулат анализа бесконечномалых Основным принципом, на котором зиждется анализ бесконечномалых, является распространением формулы телескопической суммы на суммы, с бесконечномалыми слагаемыми, полученные в результате бесконечного процесса деления.

$$\boxed{\int_a^b df(x) = f(b) - f(a)} \tag{1.2}$$

Точки отрезка $[a, b]$ (точнее их записи, в избранной системе счисления) (временного или геометрического), согласно Лейбницу представляют собой бесконечномалые отрезки. Длина отрезка соответствующего точке x выражается бесконечно-малым числом dx, называемым *дифференциалом* переменой x в этой точке. Для независимой переменной x дифференциал обычно имеет постоянное значение.

Дифференциал функции $f(x)$ в точке x обозначается $df(x)$ представляет собой (бесконечномалое) приращение функции в точке x, то есть разность значений функции в концах бесконечно-малого отрезка длины dx, которым эта точка является.

Для обозначения сумм бесконечномалых величин индексированных точками некоторого отрезка $[a, b]$ применяется знак *интеграла* $\int\limits_a^b$, а сам процесс суммирования бесконечномалых называется интегрированием. Операция интегрирования обладает всеми стандартными свойствами сумм. То есть для нее справедливы формулы почленного сложения и умножения. Можно интегрировать неравенства, а также справедлив закон соединения/деления промежутков интегрирования, согласно которому интеграл по сумме частей равен сумме интегралов по частям.

Вычисление дифференциалов Следующим, постулатом дифференциального исчисления является *формула дифференциала* функции

$$\boxed{df(x) = f(x + dx) - f(x)} \tag{1.3}$$

На самом деле это формула не вполне точная. Она представляет собой лишь *относительное равенство* в следующем смысле: две величины считаются относительно равными, если их отношение бесконечно-мало отличается от единицы. Но этого хватает для вычисления интегралов в силу следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть $F(x, dx)$ и $G(x, dx)$ представляют собой относительно равные бесконечномалые величины, тогда их интегралы по любому промежутку отличаются на бесконечномалую величину.*

Доказательство. Предположим сначала, что все рассматриваемые величины положительны. Докажем, что для любого $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$\int\limits_a^b F(x, dx) \leq \int\limits_a^b G(x, dx) + \varepsilon$$

Поскольку для любого большего единицы q справедливы неравенства $F(x) \leq qG(x)$, то интегрирование этих неравенств с использованием дистрибутивности интегрирования дает неравенства

$$I(F) = \int\limits_a^b F(x) \leq q \int\limits_a^b G(x) = qI(G)$$

откуда при $q < 1 + \varepsilon/I(G)$ следует обещанное. Аналогично доказывается противоположное неравенство. В результате, разность $|I(F) - I(G)| < \varepsilon$ для любого положительного стандартного ε. Откуда и следует бесконечная малость этой разности. $\square$

Доказанная теорема обосновывает *правило пренебрежения* при вычислении дифференциалов, по которому бесконечно-малыми величинами можно пренебрегать по сравнению с конечными. Например, вычисляя по формуле (1.3) дифференциал функции x^n, получаем

$$dx^n = (x + dx)^n - x^n = nx^{n-1}dx + C_n^2 x^{n-2}(dx)^2 + \cdots = nx^{n-1}dx$$

Последнее равенство относительное и означает, что отношение его левой и правой частей отличается от единицы на бесконечномалую величину.

Как работает анализ бесконечномалых. Пусть нам нужно определить результат некоторого, протекающего во времени процесса. Результат — это совокупность конечных значений некоторых его числовых характеристик (температура, скорость, напряжение, цена и т.д. и т.п.).

Для того чтобы применить анализ бесконечно малых мы ставим перед собой на первый взгляд еще более трудную задачу: определить как менялись характеристики процесса в течение целого интервала времени, включающего в себя момент его завершения.

Во-первых, мы должны выбрать из всех характеристик процесса, ту которую будем считать *независимой переменной.* Именно область изменения независимой переменной равномерно делится на бесконечное число бесконечномалых интервалов. Чаще всего для процессов, протекающих во времени в качестве независимой переменой берется время.

Во-вторых, производится анализ мгновенных изменений характеристик процесса, в результате которого, (в легком случае), дифференциалы (мгновенные изменения) характеристик процесса или явно выражаются через дифференциал независимой переменной (для времени это продолжительность мгновения) или составляется уравнение (дифференциальное уравнение), описывающее связь дифференциалов характеристик процесса.

В-третьих, найденные дифференциалы или дифференциальные уравнения *интегрируются.* Этим словом описывается восстановление значения величин по их дифференциалам.

Определение мгновенных изменений (дифференциалов) величин и соотношений между ними существенно облегчается благодаря тому обстоятельству, что при вычислениях можно пренебрегать произведениями бесконечномалых величин. Бесконечно малые величины, возникшие в результате первичного деления промежутка времени и соизмеримые с ними (то есть имеющие к ним конечное отношение) называются бесконечно малыми первого порядка, тогда как произведения бесконечно малых первого порядка называются бесконечно малыми второго и высших (по количеству множителей) порядков.

Геометрические применения. Метод неделимых Применения анализа бесконечномалых к геометрическим задачам определения площадей и объемов были разработаны Кавальери под именем *метода неделимых.* Название метода исходит из принципа существования бесконечномалых неделимых элементов континуума. Но на самом деле для применения метода важна не собственно неделимость элементов континуума, а их бесконечная малость, выводимая из их неделимости. Ссылка на существование неделимых позволяет избежать конкретизации процесса получения разбиения на бесконечномалые элементы.

Кеплеру принадлежит следующее доказательство теоремы Архимеда о том, что площадь кругового сектора OPQ (O — центр окружности) равна половине произведения его радиуса $R = OP = OQ$ на длину дуги PQ, на которую он опирается.

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с катетом AB длины R и катетом AC равным длине дуги PQ. Тогда нам нужно доказать равновеликость ABC и OPQ. Разделим катет BC и дугу PQ на бесконечно большое число бесконечномалых отрезков последовательным делением пополам. Так что между получившимися элементами разбиения имелось взаимно однозначное соответствие и длины всех элементов были одинаковы. Назовем элементарным треугольником (сектором) треугольник (сектор) с вершиной A (соотв. O), основанием которого служит элементарный бесконечномалый отрезок (дуга окружности). Тогда сумма (интеграл) площадей элементарных треугольников равен площади треугольника ABC, а сумма (интеграл) площадей элементарных секторов равна площади сектора OPQ. А так как площадь элементарного треугольника отличается от площади элементарного сектора на бесконечномалую второго порядка, то их суммы-интегралы отличаются на бесконечномалую величину. Что и требовалось доказать.

Чтобы вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком положительной функции $f(x)$ а снизу отрезком $[a, b]$ оси абсцисс разделим этот отрезок на бесконечно большое число бесконечномалых отрезков. Пусть dx обозначает длину бесконечномалого отрезка, расположенного в точке x. Тогда площадь криволинейной трапеции с основанием в этом бесконечно малом отрезке обозначаемая ds будет отличаться от $f(x)dx$, выражающую площадь прямоугольника с основанием dx и высоты $f(x)$ на бесконечномалую величину второго порядка ($< df(x)dx$). Поэтому суммарная площадь этих бесконечномалых прямоугольников, выраженная интегралом $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ совпадает с точностью до бесконечномалых первого порядка с площадью криволинейной трапеции.

В частности, интеграл $\int\limits_a^b x^n\,dx$ выражает площадь под параболой $y = x^n$ над отрезком $[a, b]$. А так как $\frac{dx^{n+1}}{n+1}$ как нетрудно видеть отличается от $x^n dx$ на бесконечномалые высших по отношению dx порядков, то и интеграл $\int\limits_a^b x^n\,dx$ лишь на бесконечномалую величину отличается от $\frac{1}{n+1}\int\limits_a^b dx^{n+1} = \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}$. Таким образом анализ бесконечномалых позволяет легко решить задачу о квадратуре парабол.

При этом рассуждении равномерность разбиения отрезка интегрирования не использовалась. Поэтому оно проходит и для неравномерных разбиений. В частности, если x является функцией другой переменной $x(t)$. Поэтому интеграл Стильтьеса $\int\limits_{t_0}^{t_1} y(t)\,dx(t)$ также выражает соответствующую площадь.

Дифференциал функции $f(t)$ в точке t обозначается через $df(t)$ и выражает собой изменение значения функции на бесконечно малом интервале длины dt соответствующем числу t. Величина дифференциала зависит от величины dt и, следовательно, зависит от рассматриваемого разбиения интервала. Но независимо от типа разбиения в силу принципа интегрируемости имеет место равенство

$$\int_a^b df(x) = f(b) - f(a) \tag{1.4}$$

Интегралом можно выразить также и объем пространственного тела. Предположим, что нам известно функция $s(t)$, выражающая площадь сечения этого тела горизонтальной плоскостью на высоте h. Тогда интеграл $\int_a^b s(h)\,dh$ выражает объем тела, в случае, если оно заключено по высоте между a и b. Действительно, легко видеть, что отличие между объемом цилиндра высоты dh с основанием являющимся сечением тела плоскостью на высоте h и частью тела с высотами из h-го отрезка разбиения является бесконечномалой второго порядка.

Задачи.

1. Выразить интегралом площадь фигуры в полярных координатах.
2. Найти геометрический смысл интеграла $\int |df(x)|$.
3. Найти геометрический смысл интеграла $\int g(x)df(x)$.
4. Найти геометрический смысл интеграла $\int (g(x)df(x) - f(x)dg(x)$.

2 Производная

Отношение бесконечномалого приращения функции в точке к приращению переменной является конечной (не бесконечно-малой) величиной и называется *производной* функции в точке.

В девятнадцатом столетии понятие бесконечномалой величины было заменено понятием бесконечномалой последовательности. Производная функции в точке была определена Коши как предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{2.1}$$

При этом запись $\lim\limits_{x \to a} f(x_n)$ является сокращением записи $\lim\limits_{x_n \to a} f(x)$ для любой последовательности x_n, стремящейся к a.

Дифференцируемые функции Функции, имеющие в некоторой точке производную как предельное отношение, называются *дифференцируемыми* в точке, и функции дифференцируемые во всех точках промежутка называются дифференцируемыми на этом промежутке.

Теорема 1. *Сумма дифференцируемых функций дифференцируема и производная суммы равна сумме производных.*

Доказательство. Так как сумма разностных отношений равна разностному отношению суммы, то это немедленно следует из теоремы о сумме пределов. □

Производная и рост и убывание функций Из определения производной непосредственно видно, что для неубывающей функции производная неотрицательна. Следующая теорема утверждает, что верно и обратное.

Лемма 2.1. *Пусть даны последовательности $a_n \to x$ все $a_n < x$ и $b_n \to x$: $b_n > x$. Если $f(x)$ дифференцируема в точке x, то $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} = f'(x)$*

Доказательство. Положим $\theta_n = \frac{b_n - x}{b_n - a_n}$, тогда $\frac{x - a_n}{b_n - a_n} = 1 - \theta_n$ и

$$\theta_n \frac{f(b_n) - f(x)}{b_n - x} + (1 - \theta_n) \frac{f(x) - f(a_n)}{x - a_n} = \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n}$$

Откуда

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{f(x) - f(a_n)}{x - a_n} + \lim_{n \to \infty} \theta_n \left(\frac{f(b_n) - f(x)}{b_n - x} - \frac{f(x) - f(a_n)}{x - a_n} \right)$$

Так как θ_n не превосходит единицы, а скобка, на которую оно умножается стремится к нулю, то предел правой части равен $f'(x)$. □

Теорема 2. *Функция дифференцируемая на интервале и, имеющая положительную (неотрицательную) производную возрастает (неубывает).*

Доказательство. Пусть $f(x)$ функция, производная которой на интервале (a, b) положительна. Предположим $f(a_1) \geq f(b_1)$ для некоторых $a_1 < b_1$ из (a, b). Построим последовательность вложенных отрезков $[a_k, b_k]$ со стремящимися к нулю длинами, для которых $f(a_k) \geq f(b_k)$ для любого k.

Для построения $k+1$-го отрезка делим пополам k-ый и выбираем в качестве $k+1$-го ту половину, для которой значение в левом конце больше либо равно значения в правом.

Обозначим через p общую точку всех отрезков. Тогда производная в этой точке, вычисленная с помощью последовательностей концов отрезков, в силу доказанной леммы будет неположительна вопреки условию. $\square$

Из доказанной теоремы вытекает такое важное следствие.

Следствие 3. *Функция дифференцируемая на интервале и, имеющая производную тождественно равную нулю, постоянна.*

3 Правила дифференцирования

Лемма 3.1. *Функция дифференцируемая в точке x_0 непрерывна в этой точке.*

Доказательство.

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Дифференцируемость $f(x)$ обеспечивает существование предела отношения в правой части вышеприведенного тождества. Следовательно, предел правой части равен $0 \cdot f'(x_0) = 0$. Откуда $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0}(f(x) - f(x_0)) + \lim\limits_{x \to x_0} f(x_0) = 0 + f(x_0) = f(x_0)$. □

Теорема 1. *Произведение дифференцируемых функций дифференцируемо и производная произведения вычисляется по правилу Лейбница:*

$$(fg)' = f'g + fg'$$

Доказательство.

$$\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x)g(x) - f(x)g(x_0)}{x - x_0} + \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0}$$

Переход к пределу при $x \to x_0$ в вышеприведенном тождестве дает в левой части производную произведения. Первое слагаемое в правой части имеет пределом $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \lim\limits_{x \to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = f(x_0)g'(x_0)$ А второе — $g(x_0)f'(x_0)$.

□

Теорема 2. *Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и имеет производную не равную нулю, то обратная функция $g(x)$, если имеется, дифференцируема в $y_0 = f(x_0)$ и имеет производную $g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.*

Доказательство. Пусть $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \dots y_n = f(x_n), \dots$ сходящаяся к y_0 последовательность, такая что $y_n \neq y_0$ при $n > 0$. Тогда последовательность $x_1 = g(y_1), x_2 = g(y_2), \dots$ сходится к x_0, ввиду непрерывности $g(x)$ (всякая обратимая функция непрерывна). При этом $x_n \neq x_0$ при $n > 0$. Поэтому из условия дифференцируемости $f(x)$ в x_0 последовательность отношений $\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}$ сходится к $f'(x_0) \neq 0$, поэтому последовательность обратных величин

$$\frac{x_n - x_0}{f(x_n) - f(x_0)} = \frac{g(y_n) - g(y_0)}{y_n - y_0}$$

имеет пределом $\frac{1}{f'(x_0)}$. Так как это имеет место для любой последовательности, то существует предел $\lim\limits_{y \to y_0} \frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0}$ равный $\frac{1}{f'(x_0)}$. □

Производная сложной функции

Теорема 3. *Если существуют $f'(x)$ и $g'(f(x))$, то композиция $g(f(x)$ дифференцируема в x и имеет производную равную*

$$(g(f(x)))' = g'(f(x))f'(x)$$

Доказательство. Пусть $f(x) = y$, и существуют производные $f'(x)$ и $g'(y)$.

Сначала предположим, что $g'(y) = 0$. Пусть $x_n \to x$ и $f(x_n) \neq f(x)$ для любого n. Тогда для любого n имеем равенство

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_n))}{x - x_n} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_n))}{f(x) - f(x_n)} \frac{f(x) - f(x_n)}{x - x_n}$$

Поскольку $f(x_n) \to f(x)$ (лемма 3.1), постольку обе дроби в правой части равенства имеют пределы, причем первый из них равен нулю. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(f(x)) - g(f(x_n))}{x - x_n} = 0 \tag{3.1}$$

Если же последовательность x_n такова, что постоянной является $g(x_n) = g(x)$, то равенство (3.1) тем более верно. Произвольную последовательность $x_n \to x$ можно разбить на две последовательности: первая состоит из тех ее членов, для которых $f(x_n) \neq f(x)$, а вторая — из остальных. Тогда равенство (3.1) выполняется для обеих частей, а потому выполняется и для всей последовательности x_n.

Таким образом теорема доказана в случае, если в нуль обращается $g'(y)$.

В общем случае нулю в y равна производная функции $G(y) = g(y) - g'(y_0)y$. Поэтому из вышедоказанного вытекает, что $G(f(x))$ дифференцируема в x_0 и имеет нулевую производную. Но тогда $g(f(x)) = G(f(x)) + g'(y_0)f(x)$ является суммой дифференцируемых в x_0 функций и потому дифференцируема в x_0 и имеет производную равную $(G(f(x)))' + (g'(y_0)f(x))' = 0 - g'(y_0)f'(x_0)$. □

Числа двойной точности. Введем в рассмотрение новое число *корень из нуля* обозначаемое $\sqrt{0}$, которое мы определим как бесконечно-малое и в смысле Лейбница и в смысле Ньютона. То есть будем считать, что $0 < \sqrt{0} < \varepsilon$ для любого положительного числа ε и будем считать, что $\sqrt{0}^2 = 0$. Появление одного нового числа порождает появление многих других новых чисел. А именно, мы хотим, чтобы новые числа подчинялись привычным законам сложения. Если же сложение согласуется с порядком, то добавление положительного числа всегда увеличивает. Поэтому $n\sqrt{0}$ — сумма n корней из нуля должна быть больше, чем $(n-1)\sqrt{0}$. Следовательно, все числа $n\sqrt{0}$ при различных натуральных n должны быть различны между собой. И все эти числа являются бесконечно-малыми по Лейбницу и по Ньютону. Действительно, так как $o < \varepsilon/n$, то умножение на n этого неравенства дает $n\sqrt{0} < \varepsilon$. Что и доказывает бесконечную малость $n\sqrt{0}$ по Лейбницу. А возведение в квадрат дает $(n\sqrt{0})^2 = n^2\sqrt{0}^2 = n^2 0 = 0$, что доказывает бесконечную малость $n\sqrt{0}$ в смысле Ньютона.

При умножении корня из нуля на любое обычное число $\lambda \neq 0$ не может получиться ноль. Действительно, если $\lambda\sqrt{0} = 0$, то при любом натуральном

n будет $n\lambda\sqrt{0} = 0$. Но если взять $n > \frac{1}{|\lambda|}$, то $n|\lambda| > 1$ откуда $|n\lambda\sqrt{0}| > \sqrt{0}$. Отсюда вытекает, что все числа вида $\lambda\sqrt{0}$ при различных λ должны быть различны. Действительно, если $\lambda\sqrt{0} = \mu\sqrt{0}$, то $(\lambda-\mu)\sqrt{0} = 0$, откуда $\lambda-\mu = 0$.

И, вообще, равенство $\lambda + \mu\sqrt{0} = \lambda' + \mu'\sqrt{0}$ возможно лишь при $\lambda = \lambda'$ и $\mu = \mu'$. Поэтому все числа вида $\lambda + \mu\sqrt{0}$ при различных действительных λ и μ различны. Числа такого вида мы называем *двойными*. Множество всех действительных двойных чисел обозначаем $\mathbb{RR}$.

Число λ называется *конечной частью* двойного числа $x = \lambda + \mu\sqrt{0}$ и число $\mu\sqrt{0}$ называется его *инфинитезимальной частью*.

Двойные числа с нулевой инфинитезимальной частью отождествляются с обычными числами. Числа с нулевой конечной частью называются *бесконечно малыми*.

При сложении двойных чисел независимо складываются их конечные и инфинитезимальные части. Произведение двойных чисел задается формулой

$$(a + b\sqrt{0})(c + d\sqrt{0}) = ac + (b + d)\sqrt{0} \tag{3.2}$$

Отношение порядка для двойных чисел определяется так: если их конечные части различны, то большим считается то число, которое имеет большую конечную часть. При равных конечных частях большим считается число с большим коэффициентом при корне из нуля.

Обычные законы операций сложения и умножения, включая их согласование с отношением порядка справедливы для двойных чисел.

Деление двойных чисел

Теорема 4. *Пусть $a + b\sqrt{0}$ является конечным (т.е. $a \neq 0$) двойным числом. Тогда для любого двойного числа $c+d\sqrt{0}$ существует единственное двойное число $x+y\sqrt{0}$ (частное от деления $c+d\sqrt{0}$ на $a+b\sqrt{0}$), такое что*

$$(c + d\sqrt{0}) = (x + y\sqrt{0})(a + b\sqrt{0}) \tag{3.3}$$

При этом частное определяется формулами

$$x = \frac{c}{a} \qquad y = \frac{ad - bc}{a^2} \tag{3.4}$$

Доказательство. Равенство (3.3) равносильного системе $\begin{cases} ax = c \\ ay + bx = d \end{cases}$ Из первого уравнения которой получаем $x = c/a$. Подставляя найденное значение x во второе уравнение находим y. $\square$

Деление конечного числа на бесконечномалое двойное число невозможно. А деление одного бесконечномалого числа на другое бесконечномалое позволяет однозначно определить только конечную часть результата.

Невозможно извлечь корень степени большей единицы из бесконечно малого числа.

Алгебраическая дифференцируемость Функция $f(x)$ на двойных числах называется *алгебраически дифференцируемой*, если $f(x+y\sqrt{0}) = f(x) + f'(x)y\sqrt{0}$ для любых комплексных x и y.

Лемма 3.2. *Сумма, произведение и композиция алгебраически дифференцируемых функций является алгебраически дифференцируемой.*

Доказательство. Пусть $f(z)$ является алгебраически дифференцируемой в точке $y = g(x)$, а $g(z)$ в точке x. Тогда $f(g(z))$ алгебраически дифференцируема в точке x. Действительно, значение композиции в точке $x + dx$ для любого бесконечномалого dx вычисляется так: $g(x + dx) = g(x) + g'(x)dx$. Подставляя это в $f(z)$ получаем $f(g(x + dx)) = f(g(x)) + f'(g(x))g'(x)dx$. И нужный результат вытекает из правила дифференцирования сложной функции. □

Лемма 3.3. *Обратная функция к алгебраически дифференцируемой функции с отличной от нуля производной тоже алгебраически дифференцируема.*

Доказательство. Пусть $f(z)$ алгебраически дифференцируема. Тогда значение обратной функции на двойном числе $a + b\sqrt{0}$ определяется методом неопределенных коэффициентов $f^{-1}(a + b\sqrt{0}) = x + y\sqrt{0}$. Применяя функцию $f(z)$ к обеим частям уравнения, получаем $a + b\sqrt{0} = f(x + y\sqrt{0}) = f(x) + f'(x)y\sqrt{0}$. Откуда $x = f^{-1}(a)$ и $y = b/f'(x)$. Так как $1/f'(x)$ совпадает с производной обратной функции получаем требуемый результат. □

Лемма 3.4. *Частное от деления двух алгебраически дифференцируемых функций является алгебраически дифференцируемой, если делитель имеет ненулевую конечную часть.*

Доказательство. Рассмотрим частное $f(x + y\sqrt{0})/g(x + y\sqrt{0})$. Так как по условию $f(x+y\sqrt{0}) = f(x)+yf'(x)\sqrt{0}$ и $g(x+y\sqrt{0}) = g(x)+yg'(x)\sqrt{0}$, то в силу теоремы **4** получим:

$$f(x + y\sqrt{0})/g(x + y\sqrt{0}) = \frac{f(x)}{g(x)} + y\sqrt{0}\frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g'(x)g'(x)}$$

А так как последняя дробь является производной частного $f(x)/g(x)$, то алгебраическая дифференцируемость частного доказана. □

Лемма 3.5. *Функция $f(z)$ определяемая суммой степенного ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ в круге сходимости последнего является алгебраически дифференцируемой.*

Доказательство. Подстановка в ряд двойного числа $x + y\sqrt{0}$ ввиду равенств $(x + y\sqrt{0})^n = x^n + ny^{n-1}\sqrt{0}$ дает следующий результат

$$f(x + y\sqrt{0}) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k + y\sqrt{0}\sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1} = f(x) + f'(x)y\sqrt{0}$$

□

Таким образом мы видим, что функции заданные арифметическими выражениями включающими в себя аналитические функции все являются алгебраически дифференцируемыми.

Дифференциал. Для функции $f\colon \mathbb{RR} \to \mathbb{RR}$, и стандартного числа x *дифференциал* функции f в x обозначается $df(x)$ и определяется как функция, сопоставляющая любому бесконечно малому числу dx число $df(x)$ определяемое по формуле

$$df(x) = f(x + dx) - f(x) \tag{3.5}$$

Так определяемый дифференциал функции, чтобы отличить от дифференциала Лейбница, у которого dx имеет фиксированное значение мы будем называть *неопределенным дифференциалом* Для алгебраически дифференцируемой функции неопределенный дифференциал представляет собой линейное отображение. Таким образом отношение $\frac{df(x)}{dx}$ одинаково для любого бесконечно-малого dx и равно производной $f'(x)$.

Следующая теорема фиксирует основные свойства неопределенного дифференциала, непосредственно вытекающие из его определения.

Теорема 5. *Дифференциал постоянной функции равен нулю. При умножении функции на константу ее дифференциал также умножается на эту константу. Дифференциал суммы (в том числе бесконечной) функций равен сумме дифференциалов. Дифференциал композиции функций равен композиции дифференциалов. Дифференциал произведения $d(uv)$ вычисляется по формуле Лейбница $d(uv) = udv + vdu$.*

Дифференцируемая функция заданная на обычных числах единственным образом продолжается на двойные числа до алгебраически дифференцируемой. Поэтому понятие неопределенного дифференциала не несет в себе ничего принципиально нового по сравнению с понятием производной.

Полное совпадение алгебраической и аналитической производных для функции, заданной аналитическим выражением, вытекает из доказанного плюс результат следующей лекции о производной степенного ряда.

4 Производная функционального ряда.

Лемма 4.1. *Если $|f'(z)| \leq k$, то $|f(y) - f(x)| \leq k|y - x|$ для любых x, y*

Доказательство. Функция $kx - f(x)$ имеет неотрицательную производную. Следовательно, неубывает. Поэтому при любом $y > x$ имеет место неравенство $ky - f(y)\ gekx - f(x)$ откуда $f(y) - f(x) \leq k(y - x)$. С другой стороны при $y < x$ имеет место противоположное неравенство $ky - f(y)\ gekx - f(x)$ откуда $f(y) - f(x) \geq -k(y - x)$. Полученные неравенства вместе равносильны требуемому неравенству для модулей. □

Теорема 1. *Пусть дана последовательность функций f_n дифференцируемых на интервале (a, b). Тогда сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sup|f'_k(a, b)|$ и сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(c)$ для некоторого $c \in (a, b)$ влечет сходимость и дифференцируемость суммы ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ и производная суммы ряда равна сумме производных его членов.*

Доказательство. Во-первых, из леммы 4.1 следует, что $|f_k(x)| \leq \sup f'_k(a, b)|x - c| + |f_k(y)|$ откуда немедленно вытекает абсолютная сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ при любом x.

Разностное отношение $\frac{f_k(y) - f_k(x)}{y - x}$ ограничено по модулю константой $\sup|f'_k(a, b)|$. Поэтому для любой последовательности $x_n \to x$ отклонение последовательности разностных отношений от их предела (производной) не превышает $2\sup|f'_k(a, b)|$. Следовательно, выполнено условие Вейерштраса и предел суммы ряда разностных отношений существует и равен сумме ряда их пределов, то есть производных. □

Сходимость ряда производных.

Лемма 4.2. *Для любого положительного $q < 1$ будет $\lim\limits_{n\to\infty} nq^n = 0$*

Доказательство. Последовательность $\{nq^n\}$ неотрицательна и монотонно убывает начиная с $n > \frac{1}{1-q}$. Потому что при таких n отношение $n + 1$-го члена последовательности к n-му, равное $\frac{n+1}{n}q$ меньше единицы. Следовательно, по теореме о пределе монотонной последовательности существует $\lim\limits_{n\to\infty} nq^n$, для которого справедливо соотношение

$$\lim_{n\to\infty} nq^n = \lim_{n\to\infty}(n + 1)q^{n+1} = \lim_{n\to\infty} nq^{n+1} + \lim_{n\to\infty} q^{n+1} = q \lim_{n\to\infty} nq^n$$

Откуда немедленно вытекает $\lim\limits_{n\to\infty} nq^n = 0$. □

Лемма 4.3. *Если сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k r^k|$, то для любого $s < r$ сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k|a_k s^k|$*

Доказательство. Докажем, что для почти всех k выполнено неравенство

$$k|a_k s^k| \leq |a_k r^k|, \tag{4.1}$$

тогда сумма левых частей не превосходит суммы правых (конечность которой нам известна) плюс конечное число членов, для которых это неравенство не выполнено. Тем самым будет установлена сходимость ряда левых частей. Неравенство (4.1) равносильно неравенству

$$k\frac{s^k}{r^k} \leq 1, \tag{4.2}$$

выполнение которого почти всегда вытекает из бесконечной малости последовательности в левой части. □

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1}$ называется *формальной производной* ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$.

Теорема 2 (о производной степенного ряда). *Ряд формальной производной абсолютно сходится во внутренности круга сходимости степенного ряда к производной его суммы.*

Доказательство. Пусть R — радиус сходимости ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k = f(z)$. Тогда если $|z| < R$, то можем найти такое $\delta > 0$ что $|z| + \delta < R$. Тогда

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|(|z| + \delta)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{k} C_k^n |a_k|^n \delta^{k-n} < \infty$$

Слагаемые в полученной сумме, для которых $k = n + 1$, образуют сумму $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k|a_k||z^{k-1}\delta$, которая конечна как часть конечной суммы и равна произведению δ на сумму абсолютных величин формальной производной. Откуда следует абсолютная сходимость последней.

Лемма **??** позволяет оценить максимум (по n) модуля

$$|a_k|\frac{|z^k - z_n^k|}{|z - z_n|} \leq k|a_k|(R - \delta)^{k-1} \tag{4.3}$$

Откуда видна сходимость ряда максимумов, а, значит, возможность почленного перехода к пределу при $z_n \to z$ в равенстве

$$\frac{f(z_n) - f(z)}{z_n - z} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{z^k - z_n^k}{|z - z_n|},$$

в результате которого получаем требуемое

$$f'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k z^{k-1}$$

□

5 Нули функций.

Теорема 1 (Больцано-Коши). *Если непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ принимает на его концах значения разных знаков: $f(a)f(b) < 0$, то $f(x)$ обращается в ноль на интервале (a, b).*

Доказательство. Заметим, что если функция знакопеременна на некотором отрезке, то она или обращается в нуль в середине отрезка или знакопеременна на одной из его половин. Действительно, если функция не обращается в нуль в центре отрезка, то на отрезке найдется точка, в которой функция принимает значение противоположного знака и эта точка принадлежит одной из половин отрезка. Именно на этой половине функция будет знакопеременной.

Поэтому последовательным делением пополам можно построить бесконечную вложенную последовательность отрезков $[a_n, b_n]$, таких что $f(a_n)f(b_n) < 0$. Тогда точка c, являющаяся пересечением этой последовательности, является общим пределом $= \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Из непрерывности функции получаем $0 \geq \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)f(b_n) = f(c)^2$ откуда $f(c) = 0$. □

теорема Ролля.

Лемма 5.1. *Пусть даны последовательности $a_n \to x$ все $a_n < x$ и $b_n \to x$: $b_n > x$. Если $f(x)$ дифференцируема в точке x, то $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n} = f'(x)$*

Доказательство. Положим $\theta_n = \frac{b_n - x}{b_n - a_n}$, тогда $\frac{x-a_n}{b_n-a_n} = 1 - \theta_n$ и

$$\theta_n \frac{f(b_n) - f(x)}{b_n - x} + (1-\theta_n)\frac{f(x) - f(a_n)}{x - a_n} = \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n}$$

Откуда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x) - f(a_n)}{x - a_n} + \lim_{n\to\infty} \theta_n \left(\frac{f(b_n) - f(x)}{b_n - x} - \frac{f(x) - f(a_n)}{x - a_n} \right)$$

Так как θ_n не превосходит единицы, а скобка, на которую оно умножается стремится к нулю, то предел правой части равен $f'(x)$. □

Теорема 2 (Ролля). *Если функция $f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a, b]$ и $f(a) = f(b) = 0$, то $f'(c) = 0$ для некоторой $c \in (a, b)$.*

Доказательство. Пусть $d = (b - a)/2$. Тогда или $f(a + d) = 0$ или знаки у $f(a + d) - f(a)$ и $f(b) - f(b - d)$ различны. Во втором случае непрерывная функция $f(x + d) - f(x)$ принимает значения разных знаков на $[a, a + d]$ и где-то обращается в ноль. Таким образом в отрезке $[a, b]$ содержится отрезок вдвое меньшей длины, на концах которого $f(x)$ принимает одинаковые значения. Многократное применение этого рассуждения позволяет построить такую последовательность вложенных отрезков $[a_n, b_n]$, что при любом n будет $f(a_n) = f(b_n)$, а каждый следующий отрезок вдвое короче предыдущего.

Пусть c является общей точкой построенной последовательности отрезков. Тогда производная в c, вычисленная с помощью последовательности разностных отношений в концах отрезков равна нулю.

□

Кратность нуля *Кратностью нуля* $f(x_0) = 0$ называется наименьшее число n для которого $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Ноль кратности один называется *простым.* Если $f(x_0) \neq 0$, то считаем, что $f(x)$ имеет в x_0 ноль кратности ноль.

Кратко записывать условие будем $f(x_0) = 0^k$.

Теорема 3. *Если $f(x)$ имеет в точке x_0 ноль порядка $k \geq 0$ и $g(x)$ имеет в этой же точке ноль порядка m, то их произведение имеет ноль порядка $k + m$.*

Доказательство этой теоремы можно получить с помощью следующей формулы Лейбница для высших производных произведения пары функций, которая доказывается по индукции аналогично формуле бинома Ньютона.

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)} \tag{5.1}$$

6 Ряд Тэйлора

Высшие производные Если производная пути является скоростью, то производная скорости является *ускорением.* А согласно закону Ньютона ускорение определяется силой, действующей на тело. Таким образом имеет смысл рассматривать производную производной, которая называется второй производной функции $f(x)$ и обозначается $f''(x)$. Далее производная от второй производной будет обозначаться $f'''(x)$ или $f^{(3)}(x)$. И вообще k-ая производная функции определяемая как производная ее $(k-1)$- ой производной обозначается $f^{(k)}(x)$.

С помощью высших производных выражаются коэффициенты степенного ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$

Теорема 1 (Тэйлора). *Коэффициенты степенного ряда* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ *выражаются через, представляемую им функцию* $f(z)$ *по формулам*

$$a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$$

Доказательство. k-кратное дифференцирование равенства $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ с последующей подстановкой $z = z_0$ дает нужный результат. □

Применим полученную формулу для разложения логарифма. Так как n-ая производная логарифма равна $\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$, то значение ее в единице равно $(-1)^{n-1}(n-1)!$, потому получаем такую формулу

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$$

Остаточный член Когда ряд Тэйлора сходится к породившей его функции? Пример e^{-1/x^2}.

Лемма 6.1. *Если функция* $f(x)$ *имеет* $(n+1)$ *ноль на отрезке* $[a, b]$*, с учетом кратности, то* $f^{(n)}(\xi) = 0$ *для некоторого* $\xi \in [a, b]$

Доказательство. Доказательство ведется индукцией. Для $n = 1$ утверждение леммы следует из теоремы Ролля. Пусть оно доказано для n нулей. Если функция имеет $n+1$ ноль с учетом кратности, то ее производная $f'(x)$ имеет не менее n нулей в силу леммы **??**. Поэтому $n-1$-ая производная от $f'(x)$, то есть $f^{(n)}(x)$ имеет, по предположению индукции, ноль на $[a, b]$. □

Многочлен Тэйлора с остаточным членом.

Теорема 2. *Если функция* $f(x)$ *дифференцируема на отрезке* $[0, x]$ $n+1$ *раз, найдется такое* $\theta \in [0, 1)$*, что имеет место равенство*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(k+1)!} x^{n+1}$$

Доказательство. Пусть $c = \frac{1}{x^{n+1}}\left(f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k\right)$. Тогда $f(y) - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}y^k - cy^{n+1}$ имеет в ноле ноль кратности не менее чем n и к тому же обращается в ноль в точке x. Поэтому ее $n+1$-ая производная обращается в ноль в некоторой точке, интервала $(0, x)$. Так как эта производная равна $f^{(n+1)}(y) - c(n+1)!$, то обращение ее в ноль в точке $y = \theta x$ и обеспечит обещанное равенство. □

Теорема 3. *Если x_0 является нулем кратности k функции $f(x)$, тогда* $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^k} = f^{(k)}(x_0)$

Доказательство. Рассмотрим представление Тэйлора в окрестности x_0:

$$f(x) = f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k + f^{(k+1)}(\xi)(x-x_0)^{k+1}$$

Поэтому

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^k} = f^{(k)}(x_0) + \lim_{x\to x_0} f^{(k+1)}(\xi)(x-x_0)$$

Ввиду ограниченности $k+1$-ой производной последний предел равен нулю. □

Следствие 4. *Ноль конечного порядка изолирован.*

Теорема 5 (правило Лопиталя). *Пусть $f(z)$ и $g(z)$ являются функциями такими что $f(z_0) = g(z_0) = 0$ имеют конечный и существует предел отношения производных $\lim\limits_{z\to z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}$. Тогда существует предел $\lim\limits_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)}$ и имеет место равенство*

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}$$

Доказательство. Если предел отношения производных при $z \to z_0$ равен нулю, то порядок нуля $f'(z_0)$ больше порядка нуля у $g'(z_0)$. Но порядок нуля у функции ровно на один больше чем порядок нуля производной. Поэтому порядок нуля $f(z_0)$ больше порядка нуля у $g(z_0)$ и предел отношения функций также равен нулю.

Если предел отношения производных отличен от нуля, то порядки нуля у $f'(z_0)$ и у $g'(z_0)$ совпадают. Пусть их общее значение равно $k-1$.

Тогда в силу теоремы **??** предел отношения производных будет равен отношению значений $(k-1)$-ых производных от них. То есть отношению $\frac{f^{(k)}(z_0)}{g^{(k)}(z_0)}$.

В этом случае $f(z_0)$ и $g(z_0)$ имеют одинаковый порядок нуля равный k. В силу теоремы **??** имеем $f(z) = (z-z_0)^k\varphi(z)$ и $\varphi(z_0) = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$ и $g(z) = (z-z_0)^k\psi(z)$, где $\psi(z_0) = \frac{g^{(k)}(z_0)}{k!}$. Откуда видно, что предел отношения функций такой же, как у производных. □

Пример применения правила Лопиталя

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}^3 x}{\arcsin x \ln^2(1+x)}$$

Во-первых, определим порядок нуля числителя и знаменателя. Порядок нуля тангенса равен 1, так как порядок нуля синуса равен единице, а косинус в нуль не обращается. Порядок нуля арксинуса равен единице из первого замечательного предела. И порядок нуля логарифма равен единице из второго замечательного предела. Таким образом порядки нуля числителя и знаменателя равны трем. Поэтому для нахождения предела по правилу Лопиталя придется трижды дифференцировать числитель и знаменатель. Это довольно громоздко.

Для сокращения вычислений следует по возможности расщеплять данный предел на множители. В нашем случае можно расщепить его на три множителя, из которых первый не имеет неопределенности в нуле, второй имеет в числителе и знаменателе ноль второго порядка, а третий нули первого порядка.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^3 x}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{\ln^2(1+x)}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\arcsin x}$$

7 Выпуклые функции

Выпуклые функции. Следующая формула определяет так называемое *разностное отношение* функции f на интервале $[a, b]$.

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{7.1}$$

Если функция f выражает пройденный путь при прямолинейном движении в зависимости от времени, то разностное отношение выражает среднюю скорость движения на временном интервале $[a, b]$.

Функция f называется *выпуклой сверху* на некотором промежутке, если для любой тройки $x < y < z$ точек этого промежутка выполнено неравенство

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y} \tag{7.2}$$

и называется *выпуклой снизу*, если выполнено противоположное неравенство. Если же неравенство (7.2) строгое, то функция называется *строго выпуклой.*

В случае, когда функция выражает зависимость пути от времени при прямолинейном движении, ее выпуклость вверх соответствует ускоряющемуся движению, а выпуклость вниз — замедляющемуся.

Простейшим примером выпуклой (не строго) функции является линейная, выражающая движение с постоянной скоростью. Для линейной функции $ax + b$ разностное отношение постоянно и равно a. Линейная функция выпукла и вверх и вниз. И, как нетрудно видеть обратно, всякая выпуклая и вверх и вниз функция линейна.

Следующее очевидное замечание позволяет из любого результата для выпуклых вверх функций получать аналогичный для выпуклых вниз. Поэтому в дальнейшем мы будем развивать теорию в основном для выпуклых вверх функций.

Лемма 7.1. *Функция $f(x)$ выпукла сверху в том и только том случае, когда $-f(x)$ выпукла снизу.*

Доказательство. Предоставляется читателю. □

Центр масс. Следующая лемма показывает как любую точку y из отрезка $[x, z]$ представить в виде центра масс, для пары масс θ, помещенной в x и $1 - \theta$, помещенной в z.

Лемма 7.2. *$y \in [x, z]$ если и только если найдется такое $\theta \in [0, 1]$, что $y = \theta x + (1 - \theta)z$*

Доказательство. Если $z > x$, то включение $y = \theta x + (1 - \theta)z \in [x, z]$ доказывает следующая цепочка неравенств:

$$z = \theta z + (1 - \theta)z \geq \theta x + (1 - \theta)z = y = \theta x + (1 - \theta)z \geq \theta x + (1 - \theta)x = x.$$

Если же $y \in [x, z]$, то представление $y = \theta x + (1-\theta)z$ получается при $\theta = \frac{z-y}{z-x}$ ввиду следующего тождества

$$y = \frac{z-y}{z-x}x + \frac{y-x}{z-x}z, \tag{7.3}$$

□

Множество на плоскости или в пространстве называется *выпуклым*, если вместе с любыми двумя точками содержит содержащий их отрезок. Заметим, что отрезок с концами z_1, z_2 задается как множество центров тяжести $\theta z_1 + (1-\theta)z_2$.

Теорема 1. *Функция выпукла сверху в том и только том случае, когда выпуклым является ее надграфик.*

Доказательство основано на лемме.

Лемма 7.3. *Функция $f(x)$ выпукла сверху в том и только том случае, когда при любых $x < y$ и $\theta \in [0, 1]$ выполнено (строгое) неравенство*

$$f(\theta x + (1-\theta)y) \leq \theta f(x) + (1-\theta)f(y) \tag{7.4}$$

Доказательство. Положим $c = \theta x + (1-\theta)y$, тогда $x \leq c \leq y$ и при изменении θ от нуля до единицы в качестве c можно получить любое промежуточное между x и y число (лемма 7.2).

Поэтому выпуклость сверху $f(x)$ характеризуется неравенством $\frac{f(c)-f(x)}{c-x} \leq \frac{f(y)-f(c)}{y-c}$, которое, с учетом соотношений $c-x = (1-\theta)(y-x)$, $y-c = \theta(y-x)$, равносильно неравенству

$$\theta(f(c) - f(x)) \leq (1-\theta)(f(y) - f(c)),$$

которое после переноса членов с $f(c)$ влево, а остальных вправо превращается в (7.4). □

Неравенство (**??**) мы будем называть *неравенством центра масс.*

Выпуклость и вторая производная.

Теорема 2 (Лагранжа). *Если функция $f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a, b]$, то для некоторой точки $c \in (a, b)$ выполнено равенство, такая что*

$$f'(c) = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}$$

Доказательство. Обозначим $\frac{f(a)-f(b)}{a-b}$ через λ. Рассмотрим вспомогательную функцию $F(x) = f(x) - \lambda x$. Тогда, как нетрудно, проверить $F(b) = F(a)$. Поэтому $F(x) - F(a)$ обращается в ноль на концах отрезка $[a, b]$. В силу теоремы Ролля получаем, что в некоторой точке $F'(c) = f'(c) - \lambda = 0$. □

Лемма 7.4. *Если функция $f(x)$ имеет непрерывную вторую производную в окрестности точки x, то имеет место равенство*

$$f''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

Доказательство. По формуле Тэйлора имеем $f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2}f''(\xi_1)h^2$ и $f(x-h) = f(x) - f'(x)h + \frac{1}{2}f''(\xi_2)h^2$ так что $|\xi_i - x| < h$. В таком случае

$$f(x+h) - 2f(x) + f(x-h) = \frac{1}{2}(f''(\xi_1) + f''(\xi_2)h^2),$$

откуда заключаем

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{2}(f''(\xi_1) + f''(\xi_2)) = \frac{1}{2} \lim_{h\to 0} f''(\xi_1) + \lim_{h\to 0} f''(\xi_2) = f''(x)$$

□

Теорема 3. *Дважды дифференцируемая функция $f(x)$ выпукла на $[a,b]$ если и только если $f''(x) \geq 0$ на $[a,b]$.*

Доказательство. Пусть $f''(x) \geq 0$. В силу теоремы Лагранжа для точек $a < b < c$ найдутся точки $a' \in (a,b)$ и $b' \in (b,c)$, такие что

$$\frac{f(c) - f(b)}{c - b} = f'(b') \text{ и } \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(a') \tag{7.5}$$

Далее в силу формулы Лагранжа для f' найдется $c' \in (a', b')$ для которой $\frac{f'(b') - f'(a')}{b' - a'} = f''(c')$. Так как $f''(c) \geq 0$, то $f'(b') \geq f'(a')$, откуда в силу (7.5) следует неравенство разностных отношений, обеспечивающее выпуклость.

Обратно обеспечиваемое выпуклостью неравенство для разностных отношений пар точек $x-h, x$ и $x, x+h$ дает

$$\frac{f(x) - f(x-h)}{h} \leq \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

откуда $f(x+h) - 2f(x) + f(x-h) \geq 0$ и лемма 7.4 позволяет заключить $f''(x) \geq 0$.

□

Точки перегиба. Функция может менять направление выпуклости. Например, x^3 выпукло вверх при $x < 0$ и выпукло вниз при $x > 0$. Точки, в которых функция меняет направление выпуклости называются точками *перегиба.* В точках перегиба вторая производная функции обращается в ноль. Понятие касательной к графику функции распространяется и на функции, меняющие направление выпуклости. В общем случае касательная к функции $f(x)$ в точке x_0 определяется как прямая, дифференциал, которой в x_0 совпадает с дифференциалом функции f. То есть касательная — это прямая, пересекающая график под нулевым углом. Уравнение касательной имеет вид $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Касательная в точке перегиба рассекает график функции на две части.

8 Кривизна

Второй дифференциал. Второй дифференциал определяется как дифференциал от дифференциала. То есть

$$d^2 f(x) = df(x + dx) - df(x)$$

Так как

$$df(x) = f(x + dx) - f(x),$$

то $df(x + dx)$ получится если в приведенную выше формулу подставить вместо x сумму $x + dx$. Следовательно,

$$df(x + dx) = f(x + 2dx) - f(x + dx).$$

Подставляя в первую формулу значения дифференциалов приведенные в следующих за ней формулах получаем такую формулу для второго дифференциала:

$$d^2 f(x) = f(x + 2dx) - 2f(x + dx) + f(x) \tag{8.1}$$

Формальное вычисление второго дифференциала для x^n дает многочлен от x и dx, в котором отсутствуют члены не содержащие dx в степени меньшей двух. Поэтому второй дифференциал представляет собой бесконечномалую второго порядка и при его вычислении уже нельзя считать, что $(dx)^2 = 0$. Поэтому при рассмотрении вопросов, связанных с вторым дифференциалом возникает необходимость в рассмотрении чисел *тройной точности* вида $a + b\sqrt{0} + c\sqrt{0}^2$, где $\sqrt{0}^3 = 0$.

Для тройных чисел второй дифференциал определится через вторую производную по формуле

$$d^2 f(x) = f''(x)(dx)^2 \tag{8.2}$$

Для доказательства этого воспользуемся разложением Тэйлора и получим $f(x + dx) = f(x) + f'(x)dx + f''(x)(dx)^2/2 + O(dx^3)$ и $f(x + 2dx) = f(x) + 2f'(x)dx + 2f''(x)(dx)^2 + O(dx^3)$. Подставляя эти выражения в формулу (8.1) после сокращений и отбрасывания бесконечномалых получим формулу (8.2) выражающую второй дифференциал через вторую производную.

Кривизна и второй дифференциал

$$d^2 f(x) = f(x + 2dx) - 2f(x + dx) + f(x) \tag{8.3}$$

Через второй дифференциал и вторую производную выражается такое важное математическое понятие как *кривизна*. Всякая кривая под микроскопом выглядит как прямая линия, но если присмотреться к ней еще внимательнее, то можно заметить, что она похожа на окружность. Давайте определим радиус этой окружности, называемый *радиусом кривизны* в точке.

Пусть $y = f(x)$. Угол наклона касательной в точке x имеет тангенс

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{df(x)}{dx},$$

а в точке $x + dx$ будет

$$\operatorname{tg}(\varphi + d\varphi) = \frac{df(x+dx)}{dx}$$

Вычитая из последнего равенства предыдущее, получаем

$$d\operatorname{tg}\varphi = \frac{d^2 f(x)}{dx}.$$

А так как $\operatorname{tg}'\varphi = (1 + \operatorname{tg}^2\varphi)$, то последнее равенство позволяет выразить $d\varphi$ следующим образом

$$d\varphi = \frac{f''(x)}{1 + (f'(x))^2} dx$$

Наконец, длина графика над отрезком $[x, x+dx]$ с одной стороны определяется по теореме Пифагора как $\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$, а с другой стороны центральный угол окружности неизвестного нам радиуса кривизны R с раствором $d\varphi$ дает для длины этой дуги выражение $Rd\varphi$. В результате получаем такую формулу для радиуса кривизны

$$R = \frac{(1 + (f'(x))^2)^{3/2}}{f''(x)} \tag{8.4}$$

9 Интегральные суммы

Как можно приближенно вычислить интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$? Ответ на этот вопрос основан на понятии интегральной суммы.

Разбиением отрезка $[a, b]$ называется всякое его представление в виде объединения меньших отрезков с непересекающимися внутренностями.

Конечное разбиение отрезка однозначно определяется последовательностью $a = x_0 < x_1 < \dots x_n = b$ точек деления — концов отрезков разбиения, перечисленных в порядке возрастания. Разбиение отрезка с указанной последовательностью точек деления мы будем обозначать с помощью квадратных скобок $[x_0, x_1, \dots, x_n]$.

Интегральной суммой функции $f(x)$ по разбиению $\mathcal{X} = [x_0, x_1, \dots, x_n]$ с называется любая сумма вида

$$\sum_{k=1}^{n} y_k \Delta x_k \tag{9.1}$$

Где через Δx_k обозначается разность $x_k - x_{k-1}$, а в качестве y_k берется любое число из отрезка $[\sup f([x_{k-1}, x_k]), \inf f([x_{k-1}, x_k])]$. Если все y_k взяты равными $\sup f([x_{i-1}, x_i])$, то такая интегральная сумма называется *верхней*, если же все y_i равны $\inf f([x_{i-1}, x_i])$, то *нижней*.

Верхняя интегральная сумма обозначается сокращенно $\overline{S}(\mathcal{X}, f)$ а нижняя — $\underline{S}(\mathcal{X}, f)$. Следующее *соотношение симметрии* между верхней и нижней суммами является непосредственным следствием определений супремума и инфинума.

$$\overline{S}(\mathcal{X}, f) = -\underline{S}(\mathcal{X}, -f)$$

Благодаря этому соотношению свойства нижних сумм автоматически выводятся из свойств верхних. Поэтому мы часто мы ограничиваемся рассмотрением только верхних сумм. Ясно, что любая интегральная сумма заключена между нижней и верхней.

Максимум Δx_i называется *калибром* разбиения $\mathcal{X}$ и обозначается $\Delta\mathcal{X}$.

Лемма 9.1. *Если разбиение $\mathcal{X}'$ получено из $\mathcal{X}$ добавлением одной точки, то*

$$\Delta\mathcal{X}(\sup f([a, b] - \inf f([a, b]) \geq \overline{S}(\mathcal{X}', f) - \overline{S}(\mathcal{X}, f) \geq 0$$

Доказательство. Пусть добавленная точка x' принадлежит отрезку $[x_{i-1}, x_i]$. Тогда разность верхних сумм равна

$$\sup f([x_{i-1}, x_i])(x_i - x_{i-1}) - (\sup f([x_{i-1}, x'])(x' - x_{i-1}) + \sup f([x', x_i])(x_i - x'))$$

Подставляя в уменьшаемом вместо $(x_i - x_{i-1})$ равное ему выражение $(x_i - x') + (x' - x_{i-1})$ представляем эту разность в виде

$$(\sup f([x_{i-1}, x_i]) - \sup f([x_{i-1}, x']))(x' - x_{i-1}) + \sup f([x_{i-1}, x_i]) - \sup f([x', x_i]))(x_i - x')$$

А поскольку разности супремумов на частях отрезка не превосходит разности между супремумом и инфинумом на нем, постольку получаем оценку сверху для написанного выражения как $\sup f([a, b]) - \inf f([a, b])(x_i - x_{i-1}) \leq \sup f([a, b]) - \inf f([a, b])\Delta\mathcal{X}$. Таким образом оценка сверху получена, а оценка снизу тривиальна. $\square$

Свойства интегральных сумм

1. Любая верхняя интегральная сумма не уступает любой нижней
2. Если $\mathcal{X}_1 \subset \mathcal{X}_2$ то $\overline{S}(\mathcal{X}_1, f) \geq \overline{S}(\mathcal{X}_2, f)$
3. Если $\mathcal{X}_1 \subset \mathcal{X}_2$ то $\underline{S}(\mathcal{X}_1, f) \leq \underline{S}(\mathcal{X}_2, f)$

Второе свойство вытекает из леммы о добавлении точки. Третье из второго и симметрии. Чтобы доказать первое свойство рассмотрим разбиение отрезка порожденное объединением разбиений $\mathcal{X}_1$ и $\mathcal{X}_2$ и обозначим его через $\mathcal{X}$. Тогда на основании свойств два и три заключаем.

$$\overline{S}(\mathcal{X}, f) \leq \overline{S}(\mathcal{X}_1) \qquad \underline{S}(\mathcal{X}, f) \geq \underline{S}(\mathcal{X}_2, f)$$

Откуда и вытекает требуемое неравенство $\overline{S}(\mathcal{X}_1, f) \geq \underline{S}(\mathcal{X}_2, f)$.

Верхним (нижним) интегралом функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ называется нижняя (верхняя) грань верхних (нижних) интегральных сумм, соответствующих всем возможным разбиениям отрезка $[a, b]$ и обозначается $\int\limits_a^b{}^* f(x)\,dx$ $(\int\limits_a^b{}_* f(x)\,dx)$.

Функция называется *интегрируемой* по Риману, если значения верхнего и нижнего интеграла совпадают. В этом случае их общее значение называется *интегралом Римана* функции на отрезке и обозначается $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Теорема 1. *Пусть $\{\mathcal{X}_n\}$ — последовательность разбиений отрезка $[a, b]$ с калибрами стремящимися к нулю, тогда*

$$\lim \overline{S}(\mathcal{X}_n, f) = \int\limits_a^b{}^* f(x)\,dx$$

для любой функции $f(x)$ на этом отрезке.

Доказательство. Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Тогда найдется такое разбиение $\mathcal{X}_\varepsilon$, для которого $\overline{S}(\mathcal{X}_\varepsilon, f) < \int\limits_a^b{}^* f(x)\,dx + \varepsilon/2$. Пусть N — число точек в этом разбиении. Обозначим, через $\mathcal{X}'_n$ разбиение полученное объединением разбиений $\mathcal{X}_n$ и $\mathcal{X}_\varepsilon$. Тогда N-кратное применение леммы о добавлении точки позволяет получить неравенство

$$\overline{S}(\mathcal{X}'_n, f) \leq \overline{S}(\mathcal{X}_n, f) + N(\sup f([a, b]) - \inf f([a, b]))\Delta X_n$$

Поскольку при n стремящемся к бесконечности предел второго слагаемого правой части равен нулю, постольку можем найти такое M, что при $n \geq M$ это слагаемое будет меньше, чем $\varepsilon/2$. Но тогда при таких n интегральная сумма $\overline{S}(\mathcal{X}_n, f)$ будет отличаться от верхнего интеграла не более чем на ε, что и требовалось доказать. $\square$

Свойства односторонних интегралов

Монотонность означает, что если функция $f(x)$ во всех точках отрезка $[a,b]$ не превосходит функции $g(x)$, то и верхний (нижний) интеграл от f по отрезку $[a,b]$ также не превосходит соответствующего интеграла от g.

Интервальная аддитивность означает что для любой точки b из отрезка $[a,c]$ справедливо равенство

$$\int\limits_a^c f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_b^c f(x)\,dx$$

Доказательство. Рассмотрим последовательности разбиений $\mathcal{X}'_n$ отрезка $[a,b]$ и $\mathcal{X}''_n$ отрезка $[b,c]$ со стремящимися к нулю калибрами, тогда, обозначив через $\mathcal{X}_n$ объединение $\mathcal{X}'_n \cup \mathcal{X}''_n$ получим последовательность разбиений отрезка $[a,c]$ со стремящимися к нулю калибрами для отрезка $[a,c]$. Для интегральных сумм очевидно равенство

$$\overline{S}(\mathcal{X}'_n, f) + \overline{S}(\mathcal{X}''_n, f) = \overline{S}(\mathcal{X}''_n, f)$$

Переходя в этом равенстве к пределу в соответствии с теоремой о пределе интегральных сумм, получаем требуемое равенство для интегралов. $\square$

Дистрибутивность интеграла означает, что для положительных k верно следующее:

$$k\int^* f(x)\,dx = \int^* kf(x)$$

Доказательство получается непосредственным рассмотрением интегральных сумм из теоремы о пределе интегральных сумм.

Сублинейность для верхнего интеграла означает следующее:

$$\int\limits_a^{b}{}^*(f(x)+g(x))\,dx \le \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_a^b g(x)\,dx$$

А из симметрии для нижних интегралов неравенство поменяет знак. Доказательство вытекает из соответствующих неравенств для интегральных сумм с помощью предельного перехода.

Теорема 2. *Монотонная ограниченная функция интегрируема по Риману.*

Доказательство. Пусть $f(x)$ монотонная функция на отрезке $[a,b]$. Пусть $\mathcal{X} = [x_0 \dots x_n]$ некоторое разбиение этого отрезка. Тогда справедливо следующее неравенство

$$\overline{S}(f,\mathcal{X}) - \underline{S}(f,\mathcal{X}) \le \Delta\mathcal{X}|f(b) - f(a)|$$

Действительно раз для монотонно неубывающей функции будет $\sup f([x,y]) = f(y)$ и $\inf f([x,y]) = f(x)$, (а для монотонно невозрастающей наоборот) то разность верхней и нижней интегральной сумм запишется как

$$\sum_{k=1}^{n}(f(x_k) - f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) \le \sum_{k=1}^{n}(f(x_k) - f(x_{k-1})\Delta\mathcal{X} = (f(b) - f(a))\Delta\mathcal{X}$$

Что и доказывает обещанное неравенство для монотонно неубывающей функции. Для монотонно невозрастающей доказательство аналогично. Если теперь мы рассмотрим любую последовательность разбиений с калибрами стремящимися к нулю, то из доказанного неравенства вытекает, что разность верхних и нижних интегральных сумм по ним стремится к нулю. В то время как сами эти суммы стремятся как мы знаем из прошлой лекции к верхнему и нижнему интегралам нашей функции. Откуда и следует равенство этих интегралов. □

Свойство *монотонности* для интеграла Римана непосредственно вытекает из монотонности верхнего интеграла.

Свойство *аддитивности* для интеграла Римана выполнено в сильной форме: существование одной части равенства влечет существование другой:

$$\int\limits_a^c f(x)\,dx \equiv \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_b^c f(x)\,dx$$

Для верхнего интеграла имеем свойство аддитивности и для нижнего тоже. Вычитая почленно из первого равенства второе, получаем

$$\left(\int\limits_a^{b}{}^{*} f(x)\,dx - \int\limits_a^{b}{}_{*} f(x)\,dx\right) + \left(\int\limits_b^{c}{}^{*} f(x)\,dx - \int\limits_b^{c}{}_{*} f(x)\,dx\right) = \left(\int\limits_a^{c}{}^{*} f(x)\,dx - \int\limits_a^{c}{}_{*} f(x)\,dx\right)$$

Поскольку разность верхнего и нижнего интегралов неотрицательна, а сумма неотрицательных чисел равна нулю в том и только том случае, когда оба слагаемых равны нулю, постольку из этого равенства вытекает, что интегрируемость функции на объединении интервалов равносильна тому, что она интегрируема на каждом из них.

Наконец, фундаментальное свойство *линейности*

$$\int\limits_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_a^b g(x)\,dx \tag{9.2}$$

вытекает из сублинейности односторонних интегралов. Имеет место следующая теорема

Теорема 3. *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ обе интегрируемы по Риману на отрезке $[a,b]$, то их сумма является интегрируемой на $[a,b]$ функцией и справедливо равенство* (9.2).

Свойство *дистрибутивности* для двустороннего интеграла справедливо для любых чисел независимо от знака. А именно, из линейности интеграла имеем $0 = \int\limits_a^b (f(x)+(-f(x))\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_a^b (-f(x))\,dx$. Откуда

$$\int\limits_a^b (-f(x))\,dx = -\int\limits_a^b f(x)\,dx$$

Теперь дистрибутивность интеграла для отрицательных чисел выводится из дистрибутивности для положительных, доказанной для верхнего интеграла и вышедоказанного *свойства вынесения знака.*

Модульное неравенство Для любой интегрируемой на отрезке $[a, b]$ функции справедливо неравенство

$$\int\limits_a^b |f(x)|\, dx \geq \left| \int\limits_a^b f(x)\, dx \right|$$

Доказательство. Интегрируя по $[a, b]$ неравенства $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$, в силу свойства монотонности, получаем интегральное неравенство

$$\int\limits_a^b -|f(x)|\, dx \leq \int\limits_a^b f(x)\, dx \leq \int\limits_a^b |f(x)|\, dx$$

А так как левый интеграл здесь равен $-\int\limits_a^b |f(x)|\, dx$, то эти два неравенства как раз и равносильны модульному. $\square$

10 Неопределенный интеграл

Неопределенный интеграл Если функции $F(t)$ и $f(t)$ при любых пределах интегрирования $x_1, x_2 \in [a, b]$ удовлетворяет равенству

$$F(x_2) - F(x_1) = \int\limits_{x_1}^{x_2} f(t)\ dt, \tag{10.1}$$

то функция $F(t)$ называется *неопределенным интегралом* функции $f(t)$. Если функция $F_1(t)$ также является неопределенным интегралом функции $f(t)$, то разность $F_1(t) - F(t)$ постоянна (равна $F_1(a) - F(a)$). С другой стороны прибавление к $F(t)$ любой константы, очевидно, дает функцию также являющуюся неопределенным интегралом. Поэтому условие, что $F(t)$ является неопределенным интегралом для $f(t)$ выражают в виде равенства

$$\int f(t)\, dt = F(t) + c, \tag{10.2}$$

в котором c символизирует произвольную постоянную.

Первообразная. Функция $F(z)$ имеющая в качестве производной функцию $f(z)$ называется ее *первообразной* и обозначается обозначается символом *неопределенного интеграла* $\int f(z)dz$. Понятие первообразной позволяет по новому определить определенный интеграл $\int\limits_a^b f(z)\, dz$ как разность первообразной $F(b) - F(a)$ на концах отрезка. Это определение не зависит от выбора первообразной, которая определена, как нам известно, с точностью до константы. Покажем, что для непрерывной функции $f(z)$ ее квадратура совпадает с интегралом, вычисленным через первообразную.

Определение интеграла через разность значений первообразной

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) \tag{10.3}$$

распространяется и на случай $b < a$. Таким образом мы приходим к следующему равенству

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx = -\int\limits_b^a f(x)\, dx, \tag{10.4}$$

которое можно понимать как определение интеграла с верхним пределом меньшим нижнего.

При таком определении интеграла свойство *интервальной аддитивности*:

$$\int\limits_a^b f(t)dt + \int\limits_b^c f(t)dt = \int\limits_a^c f(t)dt \tag{10.5}$$

выполняется без всяких ограничений на порядок точек a, b, c.

Существование первообразной у непрерывной функции Пусть $f(x)$ является непрерывной положительной функцией на $[a, b]$. Тогда обозначим через $F(x)$ площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком $f(x)$, а снизу отрезком $[a, x]$ оси абсцисс. Докажем, что $F'(x) = f(x)$.

Лемма 10.1 (о среднем). *Для непрерывной на $[a, b]$ функции $f(x)$ найдется такая точка ξ, для которой $f(\xi)(b - a)$ равно S — площади под графиком $f(x)$ над $[a, b]$.*

Доказательство. Если предположить что всегда $f(x) > S/(b - a)$, то под графмком $f(x)$ окажется прямоугольник размером $S/(b-a)\times(b-a)$ площади S, а потому площадь под графиком окажется больше чем S, что невозможно. Аналогично доказывается, что неравенство $f(x) < S/(b - a)$ не может быть выполнено всегда. В результате есть точки, в которых выполнено одно неравенство, а есть — в которых другое. По теореме о промежуточных значениях есть точка в которой выполнено равенство. □

Применяя лемму о среднем к отрезку $[x, x+\Delta_n x]$, получаем точку x_n из этого интервала, для которой $f(x_n)$ равно отношению приращения площади под графиком к длине интервала, то есть

$$f(x_n) = \frac{F(x + \Delta_n x) - F(x)}{\Delta_n x}$$

Если $\Delta_n x$ сходится к нулю, то x_n сходится к x. Непрерывность $f(x)$ влечет сходимость левой части вышеприведенного равенства к $f(x)$. Следовательно, $F'(x) = f(x)$.

Замена переменной в определенном интеграле

Теорема 1 (о замене переменной). *Пусть $\tau\colon [t_0, t_1] \to [\tau_0, \tau_1]$ непрерывно-дифференцируемое отображение, такое что $\tau(t_0) = \tau_0$ и $\tau(t_1) = \tau_1$ и функция $f(t)$ непрерывна на $[t_0, t_1]$. Тогда справедливо следующее равенство*

$$\int_{t_0}^{t_1} f(\tau(t))\tau'(t)\,dt = \int_{\tau_0}^{\tau_1} f(\tau)\,d\tau, \tag{10.6}$$

Доказательство. Пусть $F'(\tau) = f(\tau)$, тогда по теореме о производной сложной функции производная суперпозиции $F(\tau(t))$ равна $f(\tau(t))\tau'(t)$. Интеграл в левой части (10.6) представляется разностью $F(\tau_1) - F(\tau_0)$, а правой части — разностью $F(\tau(t_1)) - F(\tau(t_0))$, которые совпадают □

11 Интеграл Стильтьеса

Первое определение интеграла, основанное на теории пределов было предложено великим немецким математиком Б. Риманом, определившим интеграл вида $\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Более общее понятие интеграла $\int\limits_a^b f(t)\,dg(t)$ для пары функций $f(t)$, $g(t)$ было в девятнадцатом столетии предложено французским математиком Стильтьесом.

Разметкой разбиения $[x_0, x_1, \dots, x_n]$ называется последовательность точек $x_1^*, \dots, x_n^*$, таких что $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$. *Интегральной суммой* Стильтьеса функции $f(x)$ по разбиению $[x_0, x_1, \dots, x_n]$ с разметкой $x_1^*, \dots, x_n^*$ называется сумма вида

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta g(x_k) \text{ где } (\Delta g(x_k) = g(x_k) - g(x_{k-1})) \tag{11.1}$$

То есть интеграл Стильтьеса считается существующим, если для любой последовательности размеченных разбиений со стремящимися к нулю калибрами (*измельчающейся последовательности*) последовательность соответствующих интегральных сумм, сходится к этому интегралу.

Геометрический смысл интеграла Стильтьеса. Если $f(t)$ неотрицательна, а $g(t)$ не убывает и непрерывна, то определим *трапецию пары функций* $f(t), g(t)$ по промежутку $[a, b]$ как криволинейную трапецию сверху ограниченную кривой $g(t) + if(t)$, $t \in [a, b]$, снизу отрезком оси абсцисс $[g(a), g(b)]$ (ее основанием), а с боков вертикальными отрезками соединяющими концы кривой с концами основания.

Непрерывность функции $g(t)$ обеспечивает то что она принимает все значения из интервала $[g(a), g(b)]$, когда t пробегает отрезок $[a, b]$. Это необходимо для корректного определения трапеции пары функций.

Лемма 11.1 (об измельчении). *Если $f(x)$ — монотонная непрерывная функция на отрезке $[a, b]$. Тогда для любой измельчающейся последовательности $\mathcal{X}_n$ разбиений отрезка $[a, b]$ измельчающейся будет и последовательность их образов $\{f(\mathcal{X}_n)\}$.*

Доказательство. Для любого $\varepsilon > 0$ зафиксируем разбиение $[y_0 \dots y_n]$ отрезка $[f(a), f(b)]$, имеющее калибр $< \varepsilon/2$. Для каждого $i \le n$ выберем точку x_i, так что $f(x_i) = y_i$. Пусть δ равно минимуму из модулей разностей $|x_{i+1} - x_i|$. Теперь любой отрезок $[c, d] \subset [a, b]$ диаметра меньше чем δ, не может содержать более одной точки x_i и поэтому содержится в некотором отрезке вида $[x_i, x_{i+2}]$. Тогда его образ содержится в отрезке $[y_i, y_{i+2}]$ и имеет диаметр меньше ε. Отсюда вытекает, что как только калибры разбиений $\mathcal{X}_n$ станут меньше чем δ, то калибры их образов будут меньше чем ε. $\square$

Теорема 1 (о геометрическом смысле). *Если функции $f(t)$ положительна и монотонны, а $g(t)$ не убывает и непрерывна на $[a, b]$, то интеграл Стильтьеса $\int\limits_a^b f(t)\,dg(t)$ существует и равен площади трапеции пары функций $f(t), g(t)$ по промежутку $[a, b]$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{X} = \{x_0 \dots x_n\}$ представляет собой разбиение отрезка $[a, b]$. Тогда, ввиду положительности разностей $\Delta g(x_k)$ для любой разметки $x_k^* \in [x_{k-1}, x_k]$ справедливы неравенства $f(x_{k-1}) \leq f(x_k^*) \leq f(x_k)$, если $f(t)$ неубывает и противоположные неравенства, если она невозрастает. Потому для неубывающей $f(t)$ справедливы такие неравенства для интегральных сумм

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\Delta g(x_k) \leq \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta g(x_k) \leq \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta g(x_k), \tag{11.2}$$

которые меняются на противоположные, если $f(t)$ невозрастает. Если $f(t)$ неубывает (соотв. невозрастает), то интегральные суммы в левой части представляют собой площадь, составленной из прямоугольников фигуры вписанной (соотв. описанной) в трапецию пары, а интегральные суммы справа — описанной (соотв. вписанной), то разность между средней интегральной суммой и площадью трапеции пары по абсолютной величине не превосходит модуля разности между левой и правой суммами, которая равна

$$\sum_{k=1}^{n} |\Delta f(x_k)| \Delta g(x_k) \tag{11.3}$$

По абсолютной величине эта разность оценивается сверху произведением калибра $g(\mathcal{X})$ на сумму $\sum\limits_{k=1}^{n} |\Delta f(x_k)| = |f(b) - f(a)|$. Теперь нужный результат следует из леммы 11.1.

□

Замечание. Если существует интеграл $\int\limits_a^b f(t)\, dg(t)$, и $g(t)$ не локально постоянна, то подъинтегральная функция $f(t)$ ограничена. Действительно, в противном случае можно построить сколь угодно мелкие разбиения, для которых все приращения $\Delta g(x_i)$ отличны от нуля. При этом функция $f(t)$ будет неограниченна на одном из отрезков $[x_j, x_{j+1}]$ разбиения, поэтому при фиксированном выборе отмеченных точек из остальных отрезков интегральная сумма может быть сделана сколь угодно большой по абсолютной величине при выборе x_i^*, что вступает в противоречие с теоремой об ограниченности сходящейся последовательности.

Интервальная аддитивность

Теорема 2. *Если функция $g(t)$ непрерывна в точке b и существуют интегралы $\int\limits_a^b f(t)dg(t)$ и $\int\limits_b^c f(t)dg(t)$, то существует интеграл $\int\limits_a^c f(t)dg(t)$ и имеет место равенство*

$$\int_a^b f(t)dg(t) + \int_b^c f(t)dg(t) = \int_a^c f(t)dg(t) \tag{11.4}$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{X}$ обозначает разбиение $[x_0, \dots, x_n]$ отрезка $[a, c]$ с разметкой $\{x_k^*\}$. Пусть $b \in [x_{m-1}, x_m]$. Обозначим через $\mathcal{X}'$ разбиение полученное из $\mathcal{X}$ добавлением точки b (между x_{m-1} и x_m), у которого в отрезках $[x_{m-1}, b]$ и $[b, x_m]$ в качестве отмеченной точки выбираем b, а для остальных отрезков разбиения отмеченные точки остаются прежними. Тогда стильтьесовская интегральная сумма для $\mathcal{X}'$ будет отличаться от стильтьесовской интегральной суммы для $\mathcal{X}$ тем, что в ней пара слагаемых $f(b)(g(x_m)-g(b))+f(b)(g(b)-g(x_{m-1}))$ заменена на $f(x_m^*)(g(x_m)-g(x_{m-1}))$. Поэтому разность этих интегральных сумм будет равна

$$(f(x_m^*) - f(b))(g(x_m) - g(x_{m-1})) \tag{11.5}$$

Пусть дана измельчающаяся последовательность размеченных разбиений $\mathcal{X}_n$ отрезка $[a, c]$. Рассмотрим соответствующию ей последовательность размеченных разбиений $\mathcal{X}'_n$, построенных по описанным выше правилам. Так как любое $\mathcal{X}'_n$ содержит b в качестве точки деления, то оно представляется в виде объединения разбиений отрезков $[a, b]$ и $[b, c]$, а Стильтьесовская интегральная сумма по этому разбиению представляется в виде интегральных сумм для этих отрезков, которые по условию стремятся к соответствующим интегралам. Поэтому последовательность стильтьесовских интегральных сумм для разбиений $\mathcal{X}'_n$ стремится к сумме интегралов $\int\limits_a^b f(t)dg(t) + \int\limits_b^c f(t)dg(t)$, если $n \to \infty$.

Следовательно, для доказательства теоремы достаточно убедиться, что последовательность интегральных сумм по разбиениям $\mathcal{X}_n$ имеют такой же предел, что и по $\mathcal{X}'_n$. То есть достаточно доказать, что разность интегральных сумм соответствующих разбиениям $\mathcal{X}_n$ и $\mathcal{X}'_n$ стремится к нулю с ростом n. Так как эта разность представлена формулой (11.5), то непрерывность одной из функций в b и ограниченность другой влекут ее стремление к нулю. □

Интеграл $\int\limits_a^b f(t)\,dg(t)$ в случае, если $a > b$ определяется соглашением

$$\int\limits_a^b f(t)\,dg(t) = -\int\limits_b^a f(t)\,dg(t) \tag{11.6}$$

При таком определении равенство (11.4) оказывается справедливым при любых a, b, c.

Теорема 3 (формула интегрирования по частям.). *Если существует интеграл $\int\limits_a^b g(t)\,df(t)$, то существует интеграл $\int\limits_a^b f(t)\,dg(t)$ и имеет место равенство*

$$\int\limits_a^b f(t)\,dg(t) = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int\limits_a^b g(t)\,df(t) \tag{11.7}$$

Интегрирование неравенств Если поддиференциальная функция монотонно возрастает, то неравенство $f_1(t) \leq f_2(t)$ выполненное при любом $t \in [a, b]$ влечет интегральное неравенство.

$$\int\limits_a^b f_1(t)\, dg(t) \leq \int\limits_a^b f_2(t)\, dg(t) \tag{11.8}$$

В случае убывания $g(t)$ знак неравенства меняется на противоположный.

Линейность. Из теоремы о пределе последовательности, умноженной на константу для интеграла Стильтьеса немедленно вытекает такое *правило умножения* на константу c

$$\int\limits_a^b cf(x)\, dg(x) = c \int\limits_a^b f(x)\, dg(x) = \int\limits_a^b f(x)\, dcg(x) \tag{11.9}$$

При этом существование любого из трех приведенных выше интегралов влечет существование остальных.

Теорема 4.

$$\int\limits_a^b (f_1(t) + f_2(t))\, dg(t) = \int\limits_a^b f_1(t)\, dg(t) + \int\limits_a^b f_2(t)\, dg(t) \tag{11.10}$$

причем существование интегралов в правой части влечет существование интеграла в левой части.

Доказательство. Требуемое равенство для интегралов получается предельным переходом из следующего равенства для интегральных сумм

$$\sum_{k=1}^{n} (f_1(x_k^*) + f_2(x_k^*))\Delta g(x_k) = \sum_{k=1}^{n} f_1(x_k^*)\Delta g(x_k) + \sum_{k=1}^{n} f_2(x_k^*)\Delta g(x_k)$$

□

Теорема 5.

$$\int\limits_a^b f(t)\, d(g_1(t) + g_2(t)) = \int\limits_a^b f(t)\, dg_1(t) + \int\limits_a^b f(t)\, dg_2(t) \tag{11.11}$$

причем существование интегралов в правой части влечет существование интеграла в левой части.

Доказательство. Требуемое равенство для интегралов получается предельным переходом из следующего равенства для интегральных сумм

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta(g_1(x_k) + g_2(x_k)) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta g_1(x_k) + \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta g_2(x_k)$$

□

Существование интеграла Стильтьеса

Теорема 6 (существования). *Интеграл Стильтьеса* $\int\limits_a^b f(t)\,dg(t)$ *существует, если* $f(t)$ *и* $g(t)$ *кусочно монотонны и* $g(t)$ *непрерывна.*

Доказательство. Разобьем отрезок интегрирования на куски монотонности функций $f(t)$ и $g(t)$. Тогда в силу теоремы **2** существование интеграла по всему промежутку следует из его существования на интервалах монотонности. Поэтому достаточно доказать теорему для монотонных функций. Пусть M такое положительное число, которое мажорирует $|f(t)|$ на всем $[a, b]$. Интеграл $\int\limits_a^b -M\,dg(t)$ существует, так как все его интегральные суммы одинаковы. Далее интеграл $\int\limits_a^b (f(t)+M)\,dg(t)$ существует в силу теоремы **1**. Поэтому, в силу теоремы **4** существует и интеграл от суммы функций $(f(t) + M) + (-M) = f(t)$. $\square$

Задачи.

1. Выразить интегралом и определить площадь витка спирали Архимеда.

2. Выразить интегралом и определить объем прямого кругового конуса высоты h с радиусом основания r.

3. Объем Шара. Площадь сферы.

12 Двойной интеграл

Пусть $f(x,y)$ является вещественной функцией двух вещественных переменных и пусть D некоторая область плоскости. Тогда двойной интеграл

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy \tag{12.1}$$

Определяется как разность объемов тел $\{(x,y,z) \mid (x,y) \in D, 0 \leq z \leq f(x,y)\}$ (подграфик f на D) и $\{(x,y,z) \mid (x,y) \in D, 0 \geq z \geq f(x,y)\}$(надграфик f на D).

Первичные свойства объема. Первичными свойствами объема мы называем неотрицательность, аддитивность, монотонность и инвариантность.

Неотрицательность означает, что объем любого тела неотрицателен.

Аддитивность означает, что объем объединения двух непересекающихся тел равен сумме объемов этих тел. Из аддитивности вытекает также, что объем объединения двух тел равен сумме их объемов в случае, когда объем пересечения этих тел нулевой. Мы будем использовать также *счетную аддитивность* объема: объем объединения бесконечной последовательности попарно дизъюнктных множеств равен сумме объемов ее членов.

Монотонность объема означает, что, объем части тела не превосходит объема целого тела.

Инвариантность объема, означает равенство объемов у конгруэнтных тел, в частности, у тел полученных одно из другого параллельным переносом и поворотом.

Первичные свойства объема интуитивно очевидны и принимаются без доказательств. Они не являются независимыми аксиомами. Так монотонность можно вывести из аддитивности вкупе с положительностью.

Первичные свойства объема, вместе с условием нормировки: *объем единичного куба равен единице*, позволяют однозначно определить объем любого тела и вывести все остальные свойства объема. Например, доказать, как это делают в школе, что объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению длин его сторон.

Принцип Кавальери и линейность интеграла. Из первичных свойств объема, аналогично тому, как это было сделано ранее для площади плоских фигур, можно вывести следующее, известное под именем принципа Кавальери: *если сечения двух тел любой прямой параллельной данной имеют равную длину, то объемы тел равны.* Из принципа Кавальери также, как и в случае функций одной переменной выводятся свойства (даже счетной) аддитивности и однородности двойного интеграла.

Простые функции. *Элементарной функцией* двух переменных $\chi(x,y)$ называется функция, равная нулю за пределами некоторого прямоугольника $[a,b] \times [c,d]$ и постоянная на этом прямоугольнике, называемом ее *носителем.*

Простой положительной называется такая функция двух переменных, которая представляется в виде суммы (конечной или бесконечной) положительных элементарных функций.

Лемма 12.1. *Сумма (в том числе бесконечная) и произведение простых положительных функций являются простыми положительными.*

Доказательство. Если $f(x,y) = \sum\limits_{t\in T} f_t(x,y)$ и $g(x,y) = \sum\limits_{s\in S} g_s(x,y)$, где f_t и g_s являются элементарными функциями, то произведение $f\cdot g$ представляется суммой произведений

$$\sum_{(t,s)\in T\times S} f_t(x,y)g_s(x,y)$$

А поскольку произведение двух элементарных функций элементарно, постольку это равенство и доказывает простоту произведения простых функций. Простота суммы простых функций очевидна. □

Лемма 12.2. *Если функции одной переменной $f(x)$ и $g(y)$ положительны и монотонны, то их произведение $f(x)g(y)$ — простое.*

Доказательство. Действительно, монотонные функции представляются суммой ступенчатых, а произведение двух ступенек, очевидно, элементарно. □

Неположительная функция называется простой, если у нее простыми являются положительная и отрицательная части. Таким образом мы видим, что по существу все неотрицательные функции, с которыми мы можем иметь дело являются простыми.

Теорема Фубини.

Лемма 12.3. *Если функция f является простой положительной, то*

$$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \left\{ \int\limits_c^d f(x,y)\; dy \right\} dx, \tag{12.2}$$

причем промежутки интегрирования могут быть и неограниченными. То есть a, c могут равняться $-\infty$, а b, d — $+\infty$.

Доказательство. Если функция $f(x,y)$ является элементарной, принимающей значение f на носителе $[a',b']\times[c',d']$, то $\int\limits_c^d f(x,y)\,dy$ принимает значение $f(d'-c')$ при $x\in[a',b']$ и принимает нулевое значение при $x\notin[a',b']$. Поэтому повторный интеграл в правой части (12.2) равен $f(d'-c')(b'-a')$. Такое же значение принимает и интеграл в левой части, равный объему подграфика.

Пусть теперь $f(x,y) = \sum\limits_{t\in T} f_t(x,y)$ представляется суммой элементарных функций. Тогда интеграл слева окажется равен сумме интегралов элементарных слагаемых, также как и интеграл справа, ввиду того, что знаки интеграла и суммы можно менять местами. □

Заметим, что внутренний интеграл в правой части (12.2) может принимать бесконечные значения в некоторых точках. Но если повторный интеграл представляющий всю правую часть конечен, то множество точек, в которых обращается в бесконечность внутренний интеграл имеет меру нуль[1].

Теорема 1 (Фубини). *Если* $f(x,y)$ *проста а область интегрирования* D *представляет собой (возможно неограниченный) прямоугольник* $[a,b]\times[c,d]$ *и* $\iint\limits_D |f(x,y)|dxdy < \infty$*, то имеют место равенства*

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)\,dy\right) dx = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)\,dx\right) dy$$

Доказательство. Если f знакопостоянна, то теорема Фубини вытекает из доказанной выше леммы 12.3. Если f знакопеременна то она является разностью двух неотрицательных функций $f^+ - f^-$. И двойной интеграл от нее равен разности двойных интегралов. И теорема Фубини для разности следует из теоремы Фубини для уменьшаемого и вычитаемого. $\square$

Теорема 2 (о перемене порядка интегрирования). *Если* $\int\limits_a^b dx \int\limits_c^d |f(x,y)|\,dy < \infty$*, то имеет место равенство*

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)\,dx$$

Доказательство. В силу леммы 12.3 из условия теоремы вытекает конечность двойного интеграла $\iint |f(x,y)|dxdy$ по прямоугольнику $[a,b]\times[c,d]$. Поэтому нужное равенство вытекает из теоремы Фубини. $\square$

Интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$

Лемма 12.4. *Объем любого тела* B *выражается интегралом* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} S(t)\,dt$*, где* $S(t)$ *обозначает площадь сечения тела* B *плоскостью* $x = t$*.*

Доказательство. Тело $B' = \{(x,y,z) \mid 0 \le y \le S(x), 0 \le z \le 1\}$ является прямым произведением подграфика функции $S(t)$ на единичный отрезок и потому имеет объем, выражаемой интегралом $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} S(t)\,dt$. Но сечения тел B и B' любой плоскостью типа $x = t$ имеют одинаковую площадь. В силу принципа Кавальери эти тела имеют равный объем. $\square$

Сечение подграфика функции $e^{-x^2-y^2}$ плоскостью $z = h$ при $h \in [0,1]$ представляет собой круг с центром в нуле и радиуса r, определяемого уравнением $e^{-r^2} = h$. Поэтому площадь этого круга равна $S(h) = \pi r^2 = -\pi \ln h$.

[1]Множество точек прямой M называется множеством *меры нуль*, если $M \times R$ имеет нулевую площадь.

Следовательно, объем подграфика равен

$$-\pi \int\limits_0^1 \ln h \, dh = -\pi(h \ln h - h) \mid_0^1 = \pi$$

С другой стороны этот объем выражается двойным интегралом, который с помощью теоремы Фубини выражается повторным интегралом

$$\iint\limits_{-\infty -\infty}^{\infty \infty} e^{-x^2-y^2} dxdy = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2} dx \right\} dy = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right\} e^{-y^2} dy$$

В правом интеграле, внутренний интеграл, представляет собой константу, которую можно вынести за пределы внешнего интеграла. В результате мы получаем, что двойной интеграл распадается в произведение одинаковых однократных интегралов;

$$\pi = \iint\limits_{-\infty -\infty}^{\infty \infty} e^{-x^2-y^2} dxdy = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy$$

Откуда

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Замена переменной в двойном интеграле. При замене переменных главное — понять как заменять дифференциал. Произведение $dxdy$ выражает площадь бесконечно малого прямоугольника со сторонами dx и dy. Во что преобразуется этот бесконечномалый прямоугольник в результате отображения $u(x, y), v(x, y)$. Он преобразуется в бесконечномалый параллелограмм с вершинами

$(u(x, y), v(x, y)), (u(x+dx, y), v(x+dx, y)), (u(x, y+dy), v(x, y+dy)), (u(x+dx, y+dy), v(x+dx, y+dy))$

Если обозначить через u_x, v_x, u_y и v_y соответствующие частные производные, то указанный параллелограмм конгруентен следующему $(0, 0), (u_x(x, y)dx, v_x(x, y)dx), (u_y(x, y)dy, v_$

Задачи.

1. $\iint ye^{xy} dxdy$: $0 \leq x \leq y$, $1 \leq y \leq 2$
2. $\iint \sqrt{x+y} dxdy : 1 \geq y \geq x \geq 0$
3. $\iint xy^2 dxdy$: $x \leq p/2$, $y^2 \leq 2px$
4. Поменять порядок интегрирования $\int\limits_0^2 dx \int\limits_x^{2x} f(x, y) \, dy$
5. Поменять порядок интегрирования $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^3}^{x^2} f(x, y) \, dy$

13 Закон всемирного тяготения

Законы Кеплера. В начале 17 в. Иоганн Кеплер (1571-1630), обрабатывая наблюдения Тихо де Браге (1546 - 1601 гг.), открыл три закона планетных движений, известные, как законы Кеплера:

I. *Каждая планета движется в пространстве по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце.*

II. *Радиус-вектор планеты (т.е. отрезок, соединяющий Солнце с нею), описывает равные площади в равные промежутки времени.*

III. *Квадраты периодов обращения двух планет вокруг Солнца пропорциональны кубам больших полуосей их орбит.*

Ньютон открыл, что законы природы описываются дифференциальными уравнениями. Второй закон Ньютона в механике утверждает, что ускорение движущегося тела пропорционально действующей на него силе, а, открытый им закон всемирного тяготения, позволяет находить силы тяготения. В результате применения обеих законов, получаются дифференциальные уравнения, описывающие движение планет солнечной системы.

Величайшим триумфом исчисления бесконечно малых является, сделанный Ньютоном, вывод из законов Кеплера, открытого им закона всемирного тяготения.

Второй закон Кеплера Положение планеты в плоскости эклиптики определяется двумя функциями: $r(t)$ — расстоянием до Солнца и $\theta(t)$ — углом поворота от направления на перигелий (ближайщую к Солнцу точку орбиты).

Площадь, заметаемая отрезком, соединяющим Солнце с планетой за бесконечномалый отрезок времени $[t, t+dt]$ (с точностью до бесконечномалых более высокого порядка) равна $\frac{1}{2}r^2 d\theta$ В силу второго закона Кеплера, отношение этой площади к dt постоянно. Эту постоянную величину обозначим через α; тогда:

$$r^2\theta' = 2\alpha \tag{13.1}$$

Дифференцируя это равенство, получаем

$$2rr'\theta' + r^2\theta'' = 0, \tag{13.2}$$

откуда

$$2r'\theta' + r\theta'' = 0 \tag{13.3}$$

В декартовых координатах $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ вектор скорости имеет координаты:

$$x' = r'\cos\theta - r\theta'\sin\theta \qquad y' = r'\sin\theta + r\theta'\cos\theta. \tag{13.4}$$

Координаты вектора ускорения будут, следовательно, таковы:

$$x'' = r''\cos\theta - 2r'\theta'\sin\theta - r\theta'^2\cos\theta - r\theta''\sin\theta \tag{13.5}$$

$$y'' = r''\sin\theta + 2r'\theta'\cos\theta - r\theta'^2\sin\theta + r\theta''\cos\theta. \tag{13.6}$$

Пользуясь равенством (13.3), получим

$$x'' = (r'' - r\theta'^2)\cos\theta, \qquad y'' = (r'' - r\theta'^2)\sin\theta \tag{13.7}$$

то есть

$$x'' = \left(\frac{r''}{r} - \theta'^2\right)x, \qquad y'' = \left(\frac{r''}{r} - \theta'^2\right)y. \tag{13.8}$$

Отсюда видно, что вектор ускорения пропорционален радиусу-вектору планеты. Следовательно, ускорение планеты направлено к Солнцу. Величина ускорения равна

$$\sqrt{(x'')^2 + (y'')^2} = |r'' - r\theta'^2| \tag{13.9}$$

Уравнение эллипса в полярных координатах Эллипс можно определить как геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до двух данных точек, называемых *фокусами* эллипса, является постоянной величиной.

Пусть расстояние между фокусами эллипса равно δ и обозначим через D сумму расстояний от точки эллипса до фокусов. Поместим начало координат в один из фокусов эллипса, а луч исходящий из этого фокуса в направлении другого фокуса возьмем в качестве полярной оси. Через $r(\theta)$ обозначим расстояние от начала координат до точки эллипса P, направление на которую образует с полярной осью угол θ.

Тогда расстояние от проекции P на полярную ось до начала координат (первого фокуса эллипса) равно $r(\theta)\cos\theta$. Поэтому расстояние от этой проекции до второго фокуса равно $\delta - r(\theta)\cos\theta$. А так как расстояние от P до полярной оси равно $r(\theta)\sin\theta$, то по теореме Пифагора расстояние от P до второго фокуса равно

$$\sqrt{r^2(\theta)\sin^2\theta + (\delta - r(\theta)\cos\theta)^2} = \sqrt{\delta^2 - 2\delta r(\theta)\cos\theta + r^2(\theta)}$$

Поэтому сумма расстояний от P до обеих фокусов равна

$$r(\theta) + \sqrt{\delta^2 - 2\delta r(\theta)\cos\theta + r^2(\theta)} = D$$

Перенося первое слагаемое слева направо и возводя в квадрат обе части равенства, после сокращений получаем

$$\delta^2 - 2\delta r(\theta)\cos\theta = D^2 - 2Dr(\theta)$$

Откуда

$$2r(\theta)(D - \delta\cos\theta) = D^2 - \delta^2$$

Отношение $\frac{\delta}{D}$ обозначается ε и называется *эксцентриситетом* эллипса. Если через A теперь обозначить отношение $(D^2 - \delta^2)/D$, то уравнение эллипса в полярных координатах (с центром в фокусе) имеет следующий вид

$$r(\theta) = \frac{A}{1 - \varepsilon\cos\theta} \tag{13.10}$$

Большая полуось эллипса a равна $D/2$ потому что центр эллипса лежит посередине между фокусами и поэтому расстояние до него от точки эллипса, лежащей на полярной оси равно полусумме рассстояний от этой точки до фокусов. Малая полуось эллипса b равна расстоянию до центра эллипса из точки эллипса лежащей на равном расстоянии от фокусов поэтому она является катетом в прямоугольном треугольнике с гипотенузой $D/2$ и другим катетом $\delta/2$. Поэтому отношение полуосей эллипса выражается через эксцентриситет следующим образом.

$$a = b\sqrt{1-\varepsilon^2} \tag{13.11}$$

Первый закон Кеплера Второй закон Кеплера справедлив для любого центрального поля сил. Поэтому, все что он доказывает — это то что сила притяжения направлена к солнцу. То есть позволяет установить направление силы притяжения.

Первый закон Кеплера позволяет установить величину силы притяжения. Точнее, то что она обратно пропорциональна квадрату расстояния. Для этого нам нужно доказать следующее

$$r'' - r\theta'^2 = -\frac{\mu}{r^2} \tag{13.12}$$

для некоторого положительного μ.

Из уравнения эллипса (13.10) следует

$$r(1-\varepsilon\cos\theta) = A \tag{13.13}$$

Дифференцируя это уравнение по времени, получим

$$r'(1-\varepsilon\cos\theta) + \varepsilon r\theta'\sin\theta = 0, \tag{13.14}$$

что в силу равенств (13.13) и (13.1) можно переписать так:

$$Ar' + 2\alpha\varepsilon\sin\theta = 0. \tag{13.15}$$

Повторное дифференцирование дает

$$Ar'' + 2\alpha\varepsilon\theta'\cos\theta = 0 \tag{13.16}$$

Но из равенства (13.1) следует, что

$$\theta' = \frac{2\alpha}{r^2} \tag{13.17}$$

Подставляя это значение θ' в уравнение (13.16), получим

$$r'' = -\frac{4\alpha^2}{r^2}\frac{\varepsilon\cos\theta}{A} \tag{13.18}$$

Так как в силу (13.13) $\varepsilon\cos\theta = \frac{A}{r} - 1$, то

$$r'' = \frac{4\alpha^2}{r^2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{A}\right) \tag{13.19}$$

Далее, в силу (13.17)

$$r\theta'^2 = \frac{4\alpha^2}{r^2}, \tag{13.20}$$

так что

$$r'' - r\theta'^2 = -\frac{4\alpha^2}{A} \cdot \frac{1}{r^2}. \tag{13.21}$$

Но это совпадает с равенством (13.12), которое нам и требовалось доказать если положить

$$\mu = \frac{4\alpha^2}{A} \tag{13.22}$$

Третий закон Кеплера. Из первых двух законов Кеплера мы вывели, что планета движется вокруг Солнца, испытывая ускорение, по величине равное

$$\frac{4\alpha^2}{A} \cdot \frac{1}{r^2},$$

где r расстояние от планеты до Солнца и

$$r = \frac{A}{1 - \varepsilon \cos\theta}$$

уравнение орбиты планеты в полярных координатах. Постоянная α представляет собой площадь, заметаемую радиус-вектором планеты за единицу времени. Пусть T период обращения планеты вокруг Солнца; тогда αT равно площади эллипса. Если полуоси эллипса равны a и b, то площадь его будет равна πab. Следовательно,

$$\alpha = \frac{\pi ab}{T} \tag{13.23}$$

Из уравнения эллипса видно, что наибольшее и наименьшее расстояния планеты до Солнца равны $\frac{A}{1-\varepsilon}$ и $\frac{A}{1+\varepsilon}$ соответственно. Следовательно, большая полуось определится как

$$2a = \frac{A}{1-\varepsilon} + \frac{A}{1+\varepsilon}$$

или

$$A = a(1 - \varepsilon^2). \tag{13.24}$$

Далее, в силу (13.11), имеем

$$b = a\sqrt{1 - \varepsilon^2},$$

так что в силу равенства (13.23)

$$\alpha = \frac{\pi a^2 \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{T},$$

и, значит, с учетом (13.24), получаем

$$\mu = \frac{4\alpha^2}{A} = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}. \tag{13.25}$$

Величина притяжения, испытываемого планетой со стороны Солнца, следовательно, равна (произведению массы на ускорение):

$$\frac{4\pi^2 a^3 m}{T^2} \cdot \frac{1}{r^2} \tag{13.26}$$

В силу третьего закона Кеплера отношение $\frac{a^3}{T^2}$ одинаково для всех планет.

Ньютон вывел отсюда, что сила притяжения со стороны Солнцаединицы массы планеты "универсальна", то есть одна и таже для всех планет и зависит только от расстояния планеты до Солнца.

Эти соображения привели Ньютона к закону, состоящему в том, что *между любыми двумя массами M и m действует сила взаимного притяжения, равная по величине*

$$\frac{\gamma M m}{r^2},$$

где r есть расстояние между массами, а γ — некоторая универсальная постоянная

Задачи.

1. Выразить массу Солнца через γ, a, T
2. Найти отношение масс планет, если известны полуоси их орбит и их периоды обращения
3. $xydx + (x+1)dy = 0$
4. $\sqrt{y^2+1}dx = xydy$
5. $(x^2-1)y' + 2xy^2 = 0$
6. $xy' + y = y^2$
7. $y' - xy^2 = 2xy$
8. $y' - y = 2x - 3$
9. $x\frac{dx}{dt} + t = 1$